MODULE HAX201X
ANNÉE 2024/2025

Corrigé du CC1, 24 mars 2025
Durée : 1 h 15

La correction tiendra compte de la clarté et de la précision de vos arguments.

Documents, calculettes et téléphones portables sont interdits.

Le barême est indicatif.

Questions de cours (7 points)

1. Démontrer à l'aide de la définition qu'une suite convergente est bornée.

2. Soit (u_n) une suite réelle.
— Donner la définition d'une valeur d'adhérence de (u_n) sans utiliser les sous-suites.
— Donner la définition de $\limsup u_n$.
— Est-il possible qu'une valeur d'adhérence l de (u_n) vérifie $l > \limsup u_n$? Justifiez votre réponse.

3. Donner la définition d'une suite de Cauchy, puis montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

Voir le cours.

Exercice (3 points)

Calculer les limites, en justifiant précisément vos calculs :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} (2+3n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (vu en cours), donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) / \frac{\pi}{n^2} = 1$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) = \pi$.

On a $(2+3n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(2+3n)\right)$, et $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(2+3n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\ln(n)+\ln(3+\frac{2}{n}))$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(3+\frac{2}{n}) = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(n) = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim_{n\to+\infty} (2+3n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(2+3n)\right) = \exp(0) = 1$.

Exercice (12 points)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 2)$, et (u_n) la suite réelle définie par : $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{7}{8}$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, il suffit de vérifier que le minimum de f est $\geq \frac{7}{8}$. On étudie donc les variations de f. La fonction f est dérivable, de dérivée $f'(x) = x - \frac{1}{2}$ en tout point $x \in \mathbb{R}$. Sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{2}]$ on a $f'(x) \leq 0$, donc f décroissante, et sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, +\infty[$ on a $f'(x) \geq 0$, donc f croissante. Le minimum de f est atteint en $x = \frac{1}{2}$; on a $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$, ce qui conclut.

2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

On a vu que f est croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, et que $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8} \geq \frac{1}{2}$. Donc $f([\frac{1}{2}, +\infty[) \subset [\frac{1}{2}, +\infty[$. De plus, d'après la question 1 pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq \frac{7}{8} \geq \frac{1}{2}$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est incluse dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$. On peut alors appliquer un résultat du cours : $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone (croissante si $u_2 \geq u_1$, et décroissante sinon).

3. Déterminer, en justifiant les calculs, les réels $l \in \mathbb{R}$ qui peuvent être limite de la suite (u_n).

Comme la fonction f est continue, si (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, alors l est un point fixe : $l = f(l)$. Cette équation équivaut à $(l-1)(l-2) = 0$, soit $l = 1$ ou $l = 2$.

4. Déterminer, en justifiant, pour quels $u_0 \geq 0$ la suite (u_n) est convergente, et déterminer dans chaque cas sa limite.

Le calcul des points fixes de f amène à considérer les trois intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$, et $[2, +\infty[$:

• Supposons que $u_0 \in [0, 1]$. On a $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ d'après les variations de f (voir la question 1) et le fait que $f(0) = f(1) = 1$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est incluse dans $[0, 1]$ (par une récurrence immédiate). Cette suite est bornée, monotone (question 2), donc converge. Sa limite est le seul point fixe dans $[0, 1]$: c'est donc $l = 1$.

• Supposons que $u_0 \in [1, 2]$. Comme f est croissante sur $[1, 2]$ et $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$, on a $f([1, 2]) \subset [1, 2]$ (en fait on a égalité). Donc la suite (u_n) est incluse dans $[1, 2]$; en particulier elle est bornée. Elle est monotone, donc convergente, et alors il faut vérifier si elle est croissante ou décroissante pour déterminer si sa limite est $l = 1$ ou $l = 2$ (cf. question 3). On considère l'inéquation $f(x) - x \geq 0$, soit $(x-1)(x-2) \geq 0$. Ses solutions sont les réels $x \leq 1$ ou $x \geq 2$. Donc $f(x) - x \leq 0$ sur $[1, 2]$. D'après un résultat du cours, (u_n) est donc décroissante, et finalement $l = 1$.

• Supposons que $u_0 \in [2, +\infty[$. Sur cet intervalle on a $f(x) - x \geq 0$, donc (u_n) est croissante (cf. ci-dessus). D'après la question 3 les seules limites possibles sont 1 et 2, donc si $u_0 \neq 2$ la suite (u_n) ne converge pas. Comme (u_n) est aussi croissante, il vient $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. Montrer que f définit une application contractante de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même.

On a vu que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, et $f'(x) = x - \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0, 1]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. Par définition, ceci montre que f est contractante.

6. On suppose ici que $u_0 \in [0, 1]$.

(i) Montrer que $|u_n - 1| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la définition de (u_n), le fait que $f(1) = 1$, et la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a (récurrence immédiate) :

$$|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1| \leq \ldots \leq 2^{-(n+1)}|u_0 - 1|.$$

Si $u_0 \in [0, 1]$, alors $|u_0 - 1| \leq 1$. Le résultat en découle.

(ii) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi u_n)/(u_n - 1)$.
En déduire la limite de la suite de réels $v_n := n \sin(\pi u_n)$.

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\pi u_n)}{(u_n - 1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\pi u_n) - \sin(\pi)}{(u_n - 1)} = (\sin(\pi x))'_{x=1} = \pi\cos(\pi) = -\pi.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la limite ci-dessus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors

$$\left|\frac{\sin(\pi u_n)}{(u_n - 1)} + \pi\right| \leq \varepsilon.$$

En multipliant par $|u_n - 1|$ on obtient

$$|\sin(\pi u_n) + \pi(u_n - 1)| \leq \varepsilon|u_n - 1|.$$

Les inégalités usuelles $|a+b| \geq ||a|-|b|| \geq |a|-|b|$ (la première découle de l'inégalité triangulaire) donnent alors

$$|\sin(\pi u_n)| \leq (\pi + \varepsilon)|u_n - 1|.$$

Avec la question 6(i), on déduit

$$|n\sin(\pi u_n)| \leq (\pi + \varepsilon)n2^{-n}.$$

Le terme de droite tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\pi u_n) = 0$.