Résumé-semainier du cours
Module HAX201X

Les polycopiés du cours, disponibles sur Moodle, sont notés ci-dessous :
- [C1] = *Analyse 2*, par Jérémie Brieussel, 2022
- [C2] = *Développements Limités*, par Paul-Emile Paradan, 2022–2023
- [C3] = *Introduction aux séries numériques*, par Paul-Emile Paradan, 2022–2023

Les **démonstrations** à connaître sont indiquées par "($*$)".

SEMAINE 1

I. Rappels du premier semestre **[C1, §1.1-1.4]**

– Vocabulaire

(1) suites majorées, minorées, bornées, périodiques, croissantes et décroissantes
(2) utilisation de la terminologie " à partir d'un certain rang "

– Limites de suites

(1) suites convergentes et divergentes
(2) ($*$) **Lemme** : *Les suites convergentes sont bornées.*
Réciproque fausse (exemples : $u_n = (-1)^n$,...)
(3) suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$
(4) règle des croissances comparées, et applications ; exemples de limites classiques :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty\ ,\ \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{(q')^{n^2}} = 0 \quad \forall \alpha > 0, \forall q, q' > 1.$$
(5) Etude de quelques cas indéterminés, exemples :
$$u_n = ne^{2n} - n^3e^n - n^7, \quad v_n = \frac{n^3 - \cos(n) + 2n}{n^2\ln(n) + n}.$$

– limites et fonctions

(1) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} f(n) = L$.
(2) Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = L$.
(3) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue et (u_n) une suite de I convergente vers $L \in I$. Alors $(f(u_n))$ converge vers $f(L)$.
(4) Exemples : $u_n = \ln(n + 1) - \ln(n)$, $v_n = n \sin(1/n)$

– suites monotones

(1) ($*$) **Théorème** de convergence des suites monotones :
$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *monotone converge ssi elle est bornée".*
Par exemple, dans le cas où (u_n) est une suite croissante, si (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim u_n = +\infty$, et si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
(2) Exemples plus difficiles : la suite de terme général $h_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ diverge, et celle de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2$ converge. (Méthode par encadrement intégral.)

– suites adjacentes

(1) **Théorème** : *Si* (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante, et* $\lim(u_n - v_n) = 0$*, alors* (u_n) *et* (v_n) *convergent vers la même limite.*
(2) Exemple : $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$: (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes (cf. poly pour détails).

SEMAINE 2

– Relations de comparaison o, O et $\sim$

(1) Définitions

(2) Exemples : $q^n = o(1)$ si $|q| < 1$, $\sqrt{n^2+1} + n\cos(n) = O(n)$, $n^\alpha = o(q^n)$ pour tous $\alpha > 0, q > 1$, $(q')^n = o(q^n)$ pour tous $q > q' > 0$.

(3) Exemples : $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, $\sum_{k=1}^n 1/k \sim \ln(n)$

II.Suites récurrentes $u_{n+1} = F(u_n)$ **[C1, §1.6]**

(1) Définition, représentation graphique

(2) (∗) **Proposition** : *Soit $F : I \to I$, et $u_0 \in I$. On a :*
- *si F est une fonction croissante alors (u_n) est monotone : si $u_1 \leq u_0$, elle est décroissante, et si $u_1 \geq u_0$, elle est croissante ;*
- *si $F(x) \geq x$ pour tout $x \in I$, alors (u_n) est croissante ; si $F(x) \leq x$ pour tout $x \in I$, alors (u_n) est décroissante ;*
- *si (u_n) converge et F est continue, alors la limite L de (u_n) est un point fixe de F, c'est-à-dire qu'il vérifie $F(L) = L$.*

(3) Méthode générale pour étudier une suite récurrente (u_n). Deux exemples : $F(x) = \sqrt{x+1}$, et $F(x) = -x^2 + 2x$. Voir dans [C1, pp 22-24] le cas de $F(x) = \cos(x)$.

(4) Notion d'application contractante. Rappel de l'inégalité des accroissements finis.

(5) Énoncé du **théorème du point fixe** (preuve en semaine 4, et dans [C1, §1.9]) :

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $F : I \to I$ une application contractante. Alors F possède un unique point fixe L. De plus, la suite récurrente $u_{n+1} = F(u_n)$, où $u_0 \in I$, converge vers L.

(On dit qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est fermé si $I = \mathbb{R}$ ou I est de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, ou $]-\infty, a]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$).

(6) Applications/exemples :
- approximation de $\sqrt{2}$ en étudiant la suite récurrente $u_{n+1} = F(u_n)$, où $F(x) = x/2+1/x$ est contractante sur $I = [1, \infty[$.
- approximation de la racine α du polynôme $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ dans l'intervalle $[1, 2]$. On utilise la suite $u_{n+1} = F(u_n)$ avec $F(x) = 20/(x^2 + 2x + 10)$.

SEMAINE 3

III. Valeurs d'adhérences **[C1, §1.7-1.8]**

– Définition d'une valeur d'adhérence. On note $AD((u_n))$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n).

(1) Propriétés : Si $\lim u_n = l$, alors $AD((u_n)) = \{l\}$; si $\lim u_n = \pm\infty$, alors $AD((u_n)) = \emptyset$.

(2) Exemples : $AD((-1)^n) = \{\pm 1\}$; exemple de suite (u_n) non convergente et telle que $AD((u_n))$ est un singleton, ou telle que $AD((u_n))$ est de cardinal 3 ; exemple de suite (u_n) tel que $AD((u_n))$ est un intervalle : la suite qui à $n = 10^k a_k + \ldots + 10a_1 + a_0$ associe le nombre décimal $u_n = 0, a_0 a_1 ... a_k \in [0, 1[$.

(3) (∗) **Théorème de Bolzano-Weierstrass** : *Toute suite bornée a une valeur d'adhérence.* Preuve par dichotomie.

– Suite extraite, sous-suite : Définition, puis propriétés :

(1) Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\lim u_{\varphi(n)} = l$ pour toute extraction φ.

(2) Si $AD((u_n)) \neq \emptyset$, alors $l \in AD((u_n))$ si, et seulement si, il existe une extraction φ telle que $\lim u_{\varphi(n)} = l$.

– Exemples

SEMAINE 4

– limites supérieures et inférieures : Définitions, puis :

Théorème : *Si* (u_n) *est une suite bornée, alors* $\limsup(u_n)$ *et* $\liminf(u_n)$ *sont la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence, respectivement, de* (u_n).

Corollaire : deuxième preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass (via $\limsup(u_n) \in AD((u_n))$!).

– Quelques faits :

(1) $\limsup(u_n)$ et $\liminf(u_n)$ sont finis tous les deux si et seulement si (u_n) est bornée.

(2) Si (u_n) n'est pas majorée, alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

(3) Si $u_n \leq \alpha$ à partir d'un certain rang, alors $\limsup(u_n) \leq \alpha$.

(4) Si $\limsup(u_n) < \alpha$, alors $u_n < \alpha$ à partir d'un certain rang

(5) $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup(u_n) + \limsup(v_n)$ et $\liminf(u_n + v_n) \geq \liminf(u_n) + \liminf(v_n)$

Théorème (caractérisation des suites bornées convergentes) : *Soit* (u_n) *une suite bornée. Les faits suivants sont équivalents :*

i) (u_n) *est convergente,*

ii) $\limsup(u_n) = \liminf(u_n)$,

iii) (u_n) *possède une seule valeur d'adhérence.*

IV. Suites de Cauchy, et applications de Bolzano-Weierstrass [**C1, §1.9**]

Définition d'une suite de cauchy, puis :

(1) $(*)$ **Lemme** : *Toute suite de Cauchy est bornée.*

(2) $(*)$ **Théorème** : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.*

– Application 1 : preuve du théorème du point fixe.

– Application 2 : introduction aux séries numériques. Soit une suite réelle (a_k), et $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse au comportement de la suite (u_n).

$(*)$ **Lemme** : *Posons* $U_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$. *Si la suite* (U_n) *est majorée, alors la suite* (u_n) *converge.*

$(*)$ **Lemme** : *On suppose que* $a_k \neq 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *et il existe* $\rho \in]0,1[$ *tel que* $|a_k/a_{k+1}| \leq \rho$ *pour tout* k *assez grand. Alors la suite* (u_n) *converge.*

SEMAINE 5

Exemples d'utilisation des deux lemmes ci-dessus : (a) la suite (u_n), où $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(n)}{n^2}$, est convergente ; (b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(v_n(x))$, où $v_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$, est convergente.

– Application 3 : Fonctions continues sur un segment :

(1) $(*)$ **Théorème des bornes atteintes** : *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes.* Preuve via Bolzano-Weierstrass.

(2) Notion de fonction uniformément continue.

Théorème de Heine : *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.*

– Une application de la continuité uniforme :

(1) **Théorème** (Sommes de Riemann) : *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue. Alors* $\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a))$ *tend vers* $\int_a^b f(t)dt$ *lorsque* $n \to +\infty$.

(2) Calcul de la limite de la suite $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

V. Voisinages et relations o, O et $\sim$ entre fonctions [**C1,** §**2.1**]

– Définition du voisinage d'un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

– Définition des relations o, O et $\sim$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Notation $F = o_{x_0}(G)$ (resp. $F = O_{x_0}(G)$, resp. $F \sim_{x_0} G$) pour désigner le fait que F est négligeable (resp. dominée, resp. équivalente) par rapport à G au voisinage de x_0.

– Exemples :
- en 0 : $x^a = o_0(x^b)$ si $a > b > 0$
- en 0 : $\ln(x) = o_0(x^{-1})$
- en $+\infty$: $x^\alpha = o_{+\infty}(1)$ si $\alpha < 0$
- en $+\infty$: $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ si $\alpha < \beta$
- en $+\infty$: $x^\beta = o_{+\infty}(e^{\alpha x})$ si $\alpha > 0$ (pour tout $\beta \in \mathbb{R}$)
- en $+\infty$: $\ln^\beta(x) = o_{+\infty}(x^\alpha)$ si $\alpha > 0$ (pour tout $\beta \in \mathbb{R}$)
- en $+\infty$: $\ln(x)\frac{x\sin(x)+2}{\sqrt{x}-1} = O_{+\infty}(\sqrt{x}\ln(x))$
- en 0 : $\frac{1+\sqrt{x}\ln(x)}{x^2} = O_0(\frac{1}{x^2})$
- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $l \neq 0$, alors $f(x) \sim_{x_0} l$
- en 0 et en $+\infty$: $x + x^2 \sim_0 x$, $x + x^2 \sim_{+\infty} x^2$

SEMAINE 6

Proposition :
(i) si $f = o_{x_0}(g)$ *et* $h = o_{x_0}(g)$ *alors* $f + g = o_{x_0}(g)$.
(ii) si $f_1 = o_{x_0}(g_1)$ *et* $f_2 = o_{x_0}(g_2)$ *alors* $f_1 f_2 = o_{x_0}(g_1 g_2)$
(iii) si $f = o_{x_0}(g)$ *et* $g = o_{x_0}(h)$ *alors* $f = o_{x_0}(h)$
(iv) $f \sim_{x_0} g$ *ssi* $f - g = o_{x_0}(g)$
Même chose en remplacant o par O (resp. $\sim$) dans (i)–(iii) (resp. (ii)–(iii)).

Remarque : la relation $\sim_{x_0}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies au voisinage de x_0, au sens de l'UE "Combinatoire et dénombrement" (réflexivité, symétrie, transitivité sont satisfaites).

$(*)$ **Proposition (lien avec la dérivée)** :
f est dérivable en a ssi $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.
Interprétation graphique.

Exemples/applications :
- en 0 : $\frac{\sin(x)}{x} = 1 + o_0(1)$.
- en 0 : $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} + o_0(x)$
- en $+\infty$: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1) = \sqrt{x}(\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + o_{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

Donc en particulier $\frac{\sin(x)}{x} \sim_0 1$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+1} \sim_0 1 + \frac{x}{2}$.

Proposition (changement de variables) : $F = o_b(G)$ et $\lim_{t\to a}\varphi(t) = b \Rightarrow F\circ\varphi = o_a(G\circ\varphi)$.
Même chose si on remplace o par O ou $\sim$.

Attention : ça ne marche plus si on "compose" par la gauche : $x =_{+\infty} o(x^2)$ mais $\ln(x)$ n'est pas négligeable par rapport à $\ln(x^2)$ en $+\infty$.

Proposition (lien entre "o" et primitive) : Soient f, g deux fonctions continues définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = o_a(g(x))$, alors $F(x) = o_a(G(x))$, où $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x |g(t)|dt$.
Cas particulier : au voisinage de 0 on a : si $f(x) = o_0(x^n)$, alors $F(x) = o_0(x^{n+1})$.

VI. Fonctions de classe C^n et C^∞, théorème de Taylor-Young et DL [**C2, §1-2**]

- Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$
- Exemples de fonctions C^∞ : polynômes, fractions rationnelles, exp, log, sin, cos, Arcsin, Arccos, Arctan
- Exemple : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^2.

SEMAINE 7

($*$) **Proposition** *Soit f une fonction de classe C^n au voisinage de a. Si les dérivées $f^{(k)}(a)$ sont nulles pour tout $k = 0, \dots, n$, alors $f(x) = o((x-a)^n)$.*

Exemple : $\sin(x^2) - x^2 = o(x^5)$ en 0.

($*$) **Théorème (Taylor-Young)** *Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n. On a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

- notation : "f a un $DL_n(a)$".
- Propriété : si f est de classe C^n au voisinage de a, alors f admet un $DL_n(a)$; réciproque fausse : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \cos(\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ admet un $DL_2(0)$, mais f n'est pas C^2 au voisinage de 0.
- DL en 0 (et en dehors de 0) des fonctions classiques :

$$\exp, \sin, \cos, \ln(1+x), 1/(1-x), (1+x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- Opérations sur les DL : somme, produit et composition
- exemple : le $DL_6(0)$ de $f(x) = \sin(x^3 + \sin(x))$ est $f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^6)$.

SEMAINE 8

Proposition (Intégration des DL) *Soit f continue au voisinage de a et F une primitive de f. Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$, alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ de la forme $F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$.*

- La réciproque de la proposition est fausse : prendre $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$; f est C^1, a un $DL_2(0)$, mais f' n'a pas de $DL_1(0)$.

VIII. Autres applications des DL [**C2, pages 21-30**]

- Utilisation des DL pour le calcul de limites de fonctions et de suites.
- Développements asymptotiques.
- Utilisation des DL pour déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente.
- étude des extréma locaux.

SEMAINE 9

VII. DL de Taylor-Lagrange [C2, pages 13 à 20]

— Rappel : énoncé du théorème de Rolle, preuve du théorème des accroissements finis.
— Énoncé du théorème de Taylor-Lagrange (preuve sur le poly [C2]) :

Théorème (Taylor-Lagrange) *Soit I un intervalle ouvert, $a, b \in I$ tels que $a < b$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et $(n+1)$-fois dérivable sur I. Il existe $\theta \in]a, b[$ tel que l'on ait le "$DL_n(a)$ de Taylor-Lagrange" :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f^{(n+1)} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} .$$

(et également la formule obtenue en échangeant a et b).

— Application 1 : approximation d'une valeur de fonction ; exemple : approximer $\ln(1,01)$ à 10^{-5} près.
— Applications 2 : conditions suffisantes pour obtenir un "développement limité infini" (appelé "développement en série entière") ; exemples : les fonctions exp, cos, sin sont admettent un tel développement.

SEMAINES 10 et 11

IX. Séries numériques [C3]

(1) Définitions. Quelques séries connues : $\sum q^k$, $\sum \frac{1}{n}$ (Exercice 6), $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (Exercice 62), $\sum \frac{1}{n^2}$ (vue au chapitre I).

(2) Propriétés "de transfert" :
- — $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim u_n = 0$.
- — $\sum |a_k|$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge.
- — $\sum u_n$ converge $\Rightarrow$ la série des restes $R_N := \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ tend vers 0.
- — soient (a_k) et (b_k) deux suites à termes **positifs** telles que $a_k \sim b_k$. Alors les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont de même nature. De plus, en cas de divergence on a $\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k$, et en cas de convergence on a $\sum_{k=n}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} b_k$.

(3) Critères de d'Alembert et de Cauchy pour la convergence des séries à termes positifs

(4) Comparaison Série – Intégrale : *Soit $f : [0, +\infty[\to]0, \infty[$ continue décroissante et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Alors la série $\sum f(k)$ est convergente ssi $\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$.*

(5) Critère spécial des séries alternées.

(6) Exemples, dont : séries de Riemann et de Bertrand