HLMA201 Espaces Vectoriels

Gaëtan Planchon

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

5 février 2017

Dans toute la suite de ce cours et sans précision supplémentaire, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Sommaire

Sommaire

Espace vectoriel

Définition

Un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni de deux opérations : une loi *interne* (noté $+$) et une loi *externe* (noté .) vérifiant les axiomes suivants :

1.
   - $\forall u, v \in E,\ u + v \in E$;
   - $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$;
   - $\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$;
   - Il existe un élément de E noté 0_E tel que : $\forall u \in E,\ u + 0_E = u$;
   - $\forall u \in E$, il existe un élément v de E tel que $u + v = 0_E$. On le note $-u$;
2.
   - $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ \lambda.u \in E$;
   - $\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} :\ \lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$;
   - $\forall u \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} :\ (\lambda + \mu)u = \lambda.u + \mu.u$;
   - $\forall u \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} :\ (\lambda \times \mu)u = \lambda.(\mu.u)$;
   - $\forall u \in E,\ 1.u = u$.

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble non vide E muni de deux opérations (interne et externe) est un espace vectoriel, il faut montrer que ces opérations vérifient les 8 axiomes précédents.

Exemples

- $\mathbb{Q}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$;
- $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ muni des opération usuelles d'addition et de multiplication par les nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{Q}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois d'addition de matrice et de multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Vocabulaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$).

- Les éléments de E sont les *vecteurs* ;
- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont les *scalaires* ;
- 0_E est l'élément neutre pour la loi interne

Conséquence des axiomes

Règles de calcul dans un espace de vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda.x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
- Pour tout $x \in E$: $-x = (-1).x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 est l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$.

Conséquence des axiomes

Preuve :

1. Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
   $(\Leftarrow)$
   - $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$ ce qui donne après simplification dans E $0.x = 0$.
   - $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ donc $\lambda.0_E = 0_E$..

   $(\Rightarrow)$ Si $\lambda \neq 0$, alors $x = 1.x = (\lambda \times \frac{1}{\lambda}).x = \frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = 0_E$.
2. Soit $x \in E$.
   $x + (-1).x = 1.x + (-1).x = (1-1).x = 0.x = 0_E$ donc $-x = (-1).x$.

Sommaire

$\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réel :
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ x_1, \ldots, x_n \text{ des réels}\}$.
Quelles opérations définir pour munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à partir des opérations usuelles de $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réel :
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_1, \dots, x_n \text{ des réels}\}$.
Quelles opérations définir pour munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à partir des opérations usuelles de $\mathbb{R}$?

- L'addition : $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$
- La multiplication externe : $\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Vérifier que $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Espace des fonctions numériques

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas vide car

Espace des fonctions numériques

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas vide car la fonction nulle est dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Quelles opérations définir pour munir $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à partir des opérations usuelles de $\mathbb{R}$?

Espace des fonctions numériques

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas vide car la fonction nulle est dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Quelles opérations définir pour munir $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à partir des opérations usuelles de $\mathbb{R}$?

- L'addition : $f+g=h$ où h est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)+g(x)$.
- La multiplication externe : $\lambda.f=h$ où h est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $h(x)=\lambda\times f(x)$.

Vérifier que $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Espace des suites numériques

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites numériques.
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas vide car

Espace des suites numériques

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites numériques.
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas vide car la suite nulle est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Quelles opération définir pour munir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à partir des opérations usuelles de $\mathbb{R}$?

Espace des suites numériques

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites numériques.
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas vide car la suite nulle est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Quelles opération définir pour munir $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à partir des opérations usuelles de $\mathbb{R}$?

- L'addition : $u + v = w$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$.
- La multiplication externe : $\lambda.u = v$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda \times u_n$.

Vérifier que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Sommaire

Combinaison linéaire

Définition

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, soient $u_1, \dots u_k$ k vecteurs de E, et enfin $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ k scalaires. La **combinaison linaire** des vecteurs $u_1, \dots, u_k$ affectés des coefficients $\lambda_1, \dots \lambda_k$ est le vecteur v de E défini par $v = \lambda_1.u_1 + \cdots + \lambda_k.u_k$.

Remarques

1. Une combinaison linéaire d'éléments de E est une somme finie de termes.
2. Une combinaison linéaire d'éléments de E est bien un élément de E.

Exemples 1

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, la combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, -2)$ et $v_2 = (2, -3)$ affectés des coefficients -2 et 3 est le vecteur $(4, -5)$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 5, 2)$, $v_3 = (-2, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 1, 0)$ affectés des coefficients $2, -1, 3, -2$ est le vecteur

Exemples 1

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, la combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, -2)$ et $v_2 = (2, -3)$ affectés des coefficients -2 et 3 est le vecteur $(4, -5)$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 5, 2)$, $v_3 = (-2, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 1, 0)$ affectés des coefficients $2, -1, 3, -2$ est le vecteur $(-2, -4, -1)$.

Exemples 1

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, la combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, -2)$ et $v_2 = (2, -3)$ affectés des coefficients -2 et 3 est le vecteur $(4, -5)$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 5, 2)$, $v_3 = (-2, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 1, 0)$ affectés des coefficients $2, -1, 3, -2$ est le vecteur $(-2, -4, -1)$.
3. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la combinaison linéaire des vecteurs cos et sin affectées des coefficients 2 et -3 est la fonction $f = 2\cos - 3\sin$.

Exemples 2

1. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on appelle fonction *polynomiale* toute combinaison linéaire des fonctions *monomiale* $x \mapsto 1,\ x \mapsto x,\ x \mapsto x^2 \dots$. Par exemple $x \mapsto x^3 - 3x + 1$.
2. Dans $E = \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$, tout vecteur est combinaison linéaire des matrices *élémentaires* (tous les coefficients sont nuls sauf un qui vaut 1)
3. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le vecteur $x \mapsto 2 - x^2 + 5x^3$ est combinaison linéaire de $x \mapsto 1,\ x \mapsto (x-1),\ x \mapsto (x-1)^2,\ x \mapsto (x-1)^3$.

Colinéarité

Définition

E est un espace vectoriel. Soient u et v deux vecteurs de E. On dit que u est **colinéaire** à v s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda.v$; on dit que les vecteurs u et v sont colinéaires si l'un des deux vecteurs est colinéaire à l'autre

Notion de dépendance linéaire

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de E. On dit que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont **linéairement dépendants** ou **liés** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

Exemples

1. Deux vecteurs colinéaires sont liés ;
2. Dans $\mathbb{R}^2$, $(2,7),\ \ (5,-2),\ (1,-3)$ sont liés ;
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x \mapsto 1,\ \ x \mapsto \cos(2x),\ x \mapsto \cos^2(x)$ sont liés.
4. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $x \mapsto x,\ \ x \mapsto x^2$ ne sont pas liés (on parle de *famille libre* c.f. plus tard)

Notion de dépendance linéaire

Proposition :

Pour tous vecteurs $u_1, \dots, u_n$ d'un espace vectoriel E, on a l'équivalence :

$u_1, \dots, u_n$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un au moins est combinaison linéaire des autres.

Preuve

($\Leftarrow$) Quitte à faire un changement d'indice, écrivons par exemple $u_1 = \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_n u_n$. Alors $\lambda_2 u_2 + \dots \lambda_n u_n - u_1 = 0_E$
($\Rightarrow$) Si les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont linéairement dépendant, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ et non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots \lambda_n u_n = 0_E$. Quitte à faire un changement d'indice, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. Alors on peut écrire $u_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} u_n$ et on a le résultat.

Notion d'indépendance linéaire

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de E. On dit que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont **linéairement indépendants** ou **libre** s'ils ne sont pas liés... c'est à dire lorsque :

$$\forall(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0)$$

Exemples

1. Une famille d'un vecteur non nul est toujours libre.
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(\cos,\sin)$ forment une famille libre.
3. Dans $\mathbb{R}^3$ la famille formée des vecteurs $(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)$ est une famille libre.
4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la famille formée de deux suites géométriques non nulles de raison distincte est une famille libre.
5. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ où pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, $f_k : x \mapsto x^k$ est une famille libre.

Sommaire

Sommaire

Sous-espace stable

Définition

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est stable par addition et par multiplication par un scalaire lorsque :

1. $\forall u, v \in F,\ u + v \in F$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in F,\ \lambda.u \in F$.

Sous-espace stable

Exemples

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni des lois usuelles, $F = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y = 0\}$ est un sous-espace stable de E ;
2. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni des lois usuelles, $F = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace stable de E ;
3. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni des lois usuelles, l'ensemble des fonctions paires est un sous-espace stable de E ;
4. Dans $E = M_n(\mathbb{R})$ muni des lois usuelles, l'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace stable de E ;

Sous-espace vectoriel

Définition

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel, et soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel et E lorsque :

1. F est non vide ;
2. F est stable par addition et par multiplication externe.

Remarques

1. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$;
2. On peut remplacer la condition « stable par addition et par multiplication externe »par :
   $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in F,\ \lambda u + \mu v \in F$ qui dit que F est stable par combinaison linéaire.

Sous-espace vectoriel

Exemples

1. Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. $\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. L'ensemble des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
4. L'ensemble des suites numériques qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
5. $\mathbb{Q}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors tout sous-espace vectoriel de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations induites par restriction.

Preuve

Laissée à titre d'exercice (cf TD)

Remarque (importante)

Pour montrer qu'un ensemble F muni d'une addition et d'une multiplication externe est un espace vectoriel, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un autre espace vectoriel connu.

Sommaire

Produit de deux sous-espaces vectoriel

Définition

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espace vectoriel de E. On note $F \times G = \{(f, g),\ f \in F,\ f \in G\}$, l'**espace produit** de F et deux G.

Proposition

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espace vectoriel de E, alors $(F \times G, \dashv, \bowtie)$ est un sous-espace vectoriel de E^2, ou pour tous $u = (x, y), v = (x', y') \in F \times G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$u \dashv v = (x + x', y + y') \text{ et } \lambda \bowtie u = (\lambda.x, \lambda.y)$$

Remarque / exercice

On pourra vérifier que $(F \times G, \dashv, \bowtie)$ est bien un espace vectoriel.

Intersection

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Tout intersection de deux sous-espaces vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$;
- Soit $u, v \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda u + \mu v \in F$ (car F sous-espace vectoriel de E) et $\lambda u + \mu v \in G$ donc $\lambda u + \mu v \in F \cap G$.

Exemples

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0 \text{ et } 2x - x - z = 0\}$ est un espace-vectoriel.
2. L'ensemble des p-uplets solution d'un système linéaire homogène à n équations de p inconnues est l'intersection des sous-espaces déterminés par chacune des équations du système.

Somme de deux sous-espaces vectoriel

Définition

Soit F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel E. On note $F+G=\{u+v,\ u\in F,\ v\in G\}$.

Théorème

Soit F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel E. Alors $H=F+G$ est un espace vectoriel. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion des ensembles) espace vectoriel contenant F et G.

Plan de la preuve

1. Montrons que H est un s.e.v. de E :
   1.1 $O_E \in H$;
   1.2 H est stable par combinaison linéaire.
2. Montrons que H contient F et G : si $u \in F$, alors $u = u + 0_G$ donc $u \in H$, ce qui prouve que $F \subset H$. On montre de même que $G \subset H$

Plan de la preuve

1. Montrons que H est un s.e.v. de E :
   1.1 $O_E \in H$;
   1.2 H est stable par combinaison linéaire.
2. Montrons que H contient F et G : si $u \in F$, alors $u = u + 0_G$ donc $u \in H$, ce qui prouve que $F \subset H$. On montre de même que $G \subset H$
3. Montrons que si un s.e.v K de E contient F et G, alors $H \subset K$. Soit donc K un tel s.e.v. Prenons $u = x + y \in H$. Comme $F \subset K$ et $G \subset K$, on obtient que $u \in K$. Alors $H \subset K$.

Exemples

1. On note $F = \mathbb{R}(1,0)$ et $G = \mathbb{R}(0,1)$ Alors $\mathbb{R}^2 = F + G$.
2. On note $F = \mathbb{R}(1,1)$ et $G = \mathbb{R}(-1,1)$ Alors $\mathbb{R}^2 = F + G$.
3. On note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formée des fonctions paires (resp. impaires). Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} + \mathcal{P}$.

Somme directe

Définition

Soit E un espace-vectoriel et soient F et G deux sous-espace vectoriel de E. On dit E est la somme directe de F et G lorsque :

- $E = F + G$
- $F \cap G = \{O_E\}$
  On dit aussi que G est un supplémentaire de F dans E, et on note $E = F \oplus G$

On dira enfin que F est G sont en somme directe dans E lorsque $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemples

1. On note $F = \mathbb{R}(1,0)$ et $G = \mathbb{R}(0,1)$ Alors $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
2. On note $F = \mathbb{R}(1,1)$ et $G = \mathbb{R}(-1,1)$ Alors $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
3. On note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formée des fonctions paires (resp. impaires). Alors $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$.

Théorème

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espace vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si :

$$\forall u \in F+G, \text{ il existe un unique couple } (f,g) \in F \times G \text{ tel que } u = f+g.$$

Preuve

: $(\Rightarrow)$ Soit $u \in F + G$. Comme $E = F + G$, alors : $\exists (f, g) \in F \times G$ tq $u = f + g$, par définition...
Manque l'unicité.

Preuve

: ($\Rightarrow$) Soit $u \in F + G$. Comme $E = F + G$, alors : $\exists (f, g) \in F \times G$ tq $u = f + g$, par définition...
Manque l'unicité. Soit alors $(f', g') \in F \times G$ tq $u = f' + g'$. On a $f + g = f' + g'$ donc $f - f' = g' - g$. Alors $f - f' \in F \cap G$ et $g' - g \in F \cap G$.

Preuve

: ($\Rightarrow$) Soit $u \in F + G$. Comme $E = F + G$, alors : $\exists (f, g) \in F \times G$ tq $u = f + g$, par définition...
Manque l'unicité. Soit alors $(f', g') \in F \times G$ tq $u = f' + g'$. On a $f + g = f' + g'$ donc $f - f' = g' - g$. Alors $f - f' \in F \cap G$ et $g' - g \in F \cap G$. Et comme $F \cap G = \{0_E\}$, on en déduit que $f = f'$ et $g = g'$.

Preuve

: ($\Rightarrow$) Soit $u \in F + G$. Comme $E = F + G$, alors : $\exists (f, g) \in F \times G$ tq $u = f + g$, par définition...
Manque l'unicité. Soit alors $(f', g') \in F \times G$ tq $u = f' + g'$. On a $f + g = f' + g'$ donc $f - f' = g' - g$. Alors $f - f' \in F \cap G$ et $g' - g \in F \cap G$. Et comme $F \cap G = \{0_E\}$, on en déduit que $f = f'$ et $g = g'$.
($\Leftarrow$) Soit $u \in F \cap G$. Alors $u = 0_F + u = u + 0_G \in F + G$. Par unicité de la décomposition de u, on en déduit alors que $u = 0_F = 0_G = 0_E$. Finalement, $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0 \text{ et } x = z\}$. Alors, E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et E et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

Remarque

Il n'y a pas unicité du supplémentaire pour un sous-espace vectoriel donné.

Sommaire

Théorème

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel, et A une partie de E. Parmi tous les sous-espaces vectoriel de E contenant A, il y en a un plus petit que tous les autres : l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

Définition

Cet ensemble est l'**espace engendré** par A, et se note $\mathrm{vect}(A)$.

Plan de la preuve

Soit F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A.

F est un sous-espace vectoriel de E contenant A

Soit F' un sous-espace vectoriel de E contenant A. Montrons que $F \subset F'$. Soit alors $x \in F$. x est une combinaison linéaire d'éléments de A. Comme $A \subset F'$, x est aussi combinaison linéaire d'éléments de F', et donc $x \in F'$.

Remarques

1. Si $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$, on note parfois
   $\text{vect}(A) = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$
2. Si e_1 est un vecteur non nul de E, $\text{vect}(e_1) = \{\lambda.e_1,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$
3. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, l'espace engendré par F et G est $F + G$.
4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$; Alors
   $F =$vect$((-1, 1, 0); (0, 1, -1))$.

A connaître / savoir faire

- Axiomes d'espace vectoriel
- Montrer qu'un sous-ensemble donné est un sous-espace vectoriel dans espace vectoriel « de référence »
- Montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'une famille de vecteur
- Montrer qu'une famille de vecteurs d'un e.v. est libre
- Montrer que deux s.e.v sont en somme directe dans un espace vectoriel.