HLMA201 Applications linéaires

Gaëtan Planchon

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

15 mars 2017

Sommaire

Sommaire

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** (ou un *morphisme d'espace vectoriel*) lorsque :

1. $\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E,\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathscr{L}(E, F)$. Dans le cas particulier où $E = F$, on notera $\mathscr{L}(E)$ ou lieu de $\mathscr{L}(E, E)$.

Exemple

On note $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \end{cases}$$

est un élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.

Exemple

L'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto XP \end{cases}$$

est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$

Exemple

L'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto u_0 \end{cases}$$

est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$.

A tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, on associe le polynôme *dérivé*, noté P' :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

On définit ainsi une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Exemple

L'application

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z, x + z) \end{cases}$$

est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
Plus généralement, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Ici, on identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

1. En pratique, on utilisera le critère suivant : f est linéaire si et seulement si

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

1. En pratique, on utilisera le critère suivant : f est linéaire si et seulement si

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

1. En pratique, on utilisera le critère suivant : f est linéaire si et seulement si
$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$.
3. Soit f une application de E dans F. Alors f est linéaire si et seulement si, pour tous $u_1, \ldots u_n \in E$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on a $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(u_k)$.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

1. En pratique, on utilisera le critère suivant : f est linéaire si et seulement si
$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $f(0_E) = 0_F$.
3. Soit f une application de E dans F. Alors f est linéaire si et seulement si, pour tous $u_1, \ldots u_n \in E$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on a $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(u_k)$.
4. L'application $id_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \mapsto x \end{cases}$ est dans $\mathscr{L}(E, E)$: c'est *l'identité* de E.

Vocabulaire

- Lorsque $E = F$, un élément de $\mathscr{L}(E, E)$ est appelé un *endomorphisme* de E ; l'ensemble des endomorphismes de E se note simplement $\mathscr{L}(E)$.

Vocabulaire

- Lorsque $E = F$, un élément de $\mathscr{L}(E, E)$ est appelé un *endomorphisme* de E ; l'ensemble des endomorphismes de E se note simplement $\mathscr{L}(E)$.
- Lorsque $f : E \to F$ est une application linéaire bijective, f est un *isomorphisme*

Vocabulaire

- Lorsque $E = F$, un élément de $\mathscr{L}(E, E)$ est appelé un *endomorphisme* de E ; l'ensemble des endomorphismes de E se note simplement $\mathscr{L}(E)$.
- Lorsque $f : E \to F$ est une application linéaire bijective, f est un *isomorphisme*
- Lorsque $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective, f est un *automorphisme*

Sommaire

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles sur les applications de E dans F.

Plan de la preuve

On montre que $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans F.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles sur les applications de E dans F.

Plan de la preuve

On montre que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans F.

- L'application nulle de E dans F est évidemment linéaire.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois usuelles sur les applications de E dans F.

Plan de la preuve

On montre que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans F.

- L'application nulle de E dans F est évidemment linéaire.
- Soient f et g dans $\mathscr{L}(E,F)$, et soit λ, μ des scalaires. Alors on vérifie que $h = \lambda f + \mu g$ est bien linéaire.

Sommaire

Définition

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors on note $h = g \circ f$ l'application de E dans G définie pour tout x dans E par $h(x) = g\left(f(x)\right)$. C'est la composée de f par g.

Exemple

Si $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to R \\ P \mapsto P(0) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ alors

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P'(0) \end{cases}.$$

Proposition

Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $g \in \mathscr{L}(F, G)$,

$$g \circ f \in \mathscr{L}(E, G).$$

En particulier, la composée de deux endomorphismes E est un endomorphisme de E.

Preuve

Proposition

Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$, pour tout $g \in \mathscr{L}(F,G)$,

$$g \circ f \in \mathscr{L}(E,G).$$

En particulier, la composée de deux endomorphismes E est un endomorphisme de E.

Preuve

- Soient x et y dans E. Alors $g \circ f(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x)+f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$.

Proposition

Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $g \in \mathscr{L}(F, G)$,

$$g \circ f \in \mathscr{L}(E, G).$$

En particulier, la composée de deux endomorphismes E est un endomorphisme de E.

Preuve

- Soient x et y dans E. Alors $g \circ f(x+y) = g(f(x+y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.
  $g \circ f(\lambda x) = g(f(\lambda x)) = g(\lambda f(x)) = \lambda g(f(x)) = \lambda g \circ f(x)$.

Sommaire

Sommaire

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Plan de la preuve

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Plan de la preuve

- $f(0) \in f(G)$ donc $f(G) \neq \emptyset$.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Plan de la preuve

- $f(0) \in f(G)$ donc $f(G) \neq \emptyset$.
- Soient y_1 et y_2 des éléments de $f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $y_1 + y_2 \in f(G)$ et $\lambda y_1 \in f(G)$.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Plan de la preuve

- $f(0) \in f(G)$ donc $f(G) \neq \emptyset$.
- Soient y_1 et y_2 des éléments de $f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $y_1 + y_2 \in f(G)$ et $\lambda y_1 \in f(G)$.
- Il existe x_1 et x_2 dans G tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Plan de la preuve

- $f(0) \in f(G)$ donc $f(G) \neq \emptyset$.
- Soient y_1 et y_2 des éléments de $f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $y_1 + y_2 \in f(G)$ et $\lambda y_1 \in f(G)$.
- Il existe x_1 et x_2 dans G tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
- Alors $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(G)$

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Plan de la preuve

- $f(0) \in f(G)$ donc $f(G) \neq \emptyset$.
- Soient y_1 et y_2 des éléments de $f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $y_1 + y_2 \in f(G)$ et $\lambda y_1 \in f(G)$.
- Il existe x_1 et x_2 dans G tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
- Alors $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(G)$car G est un espace vectoriel.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'ensemble $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Plan de la preuve

- $f(0) \in f(G)$ donc $f(G) \neq \emptyset$.
- Soient y_1 et y_2 des éléments de $f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $y_1 + y_2 \in f(G)$ et $\lambda y_1 \in f(G)$.
- Il existe x_1 et x_2 dans G tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
- Alors $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(G)$car G est un espace vectoriel.
- $\lambda y_1 = \lambda f(x_1) = f(\lambda x_1) \in f(G)$.

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble $f(E) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F \ \ \mathrm{tq}\ \exists x \in E,\ f(x) = y\}$. C'est l'image directe de f.

Théorème

Lorsque $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque

On rappelle que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exemples

1. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ .Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}[X]$
2. L'application $g : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto u_0 \end{cases}$ est surjective

Sommaire

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve

- $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(G) \neq \emptyset$;

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve

- $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(G) \neq \emptyset$;
- Soient x_1, x_2 dans $f^{-1}(G)$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve

- $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(G) \neq \emptyset$;
- Soient x_1, x_2 dans $f^{-1}(G)$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- On sait que $f(x_1) \in G$ et $f(x_2) \in G$.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve

- $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(G) \neq \emptyset$;
- Soient x_1, x_2 dans $f^{-1}(G)$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- On sait que $f(x_1) \in G$ et $f(x_2) \in G$.
- Alors $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in G$

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve

- $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(G) \neq \emptyset$;
- Soient x_1, x_2 dans $f^{-1}(G)$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- On sait que $f(x_1) \in G$ et $f(x_2) \in G$.
- Alors $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in G$ car G est un e.v.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit G un sous-espace vectoriel de F. Alors l'ensemble $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Plan de la preuve

- $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(G) \neq \emptyset$;
- Soient x_1, x_2 dans $f^{-1}(G)$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- On sait que $f(x_1) \in G$ et $f(x_2) \in G$.
- Alors $\lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \in G$ car G est un e.v.
- Alors $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \in G$ car f est linéaire.
- Conclusion : $\lambda x_1 + \mu x_2 \in G$.

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \text{ tq } f(x) = 0\}$. C'est le noyau de f

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \ \text{ tq } f(x) = 0\}$. C'est le noyau de f

Théorème

Lorsque $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Preuve

$(\Rightarrow)$

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Preuve

($\Rightarrow$)

- Supposons f injective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Preuve

($\Rightarrow$)

- Supposons f injective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$.
- Mais comme f est injective, $x = 0$.

($\Leftarrow$)

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Preuve

$(\Rightarrow)$

- Supposons f injective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$.
- Mais comme f est injective, $x = 0$.

$(\Leftarrow)$

- Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Preuve

$(\Rightarrow)$

- Supposons f injective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$.
- Mais comme f est injective, $x = 0$.

$(\Leftarrow)$

- Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- Soient alors x et x' dans E. Supposons que $f(x) = f(x')$.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Preuve

$(\Rightarrow)$

- Supposons f injective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$.
- Mais comme f est injective, $x = 0$.

$(\Leftarrow)$

- Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- Soient alors x et x' dans E. Supposons que $f(x) = f(x')$.
- Comme f est linéaire, $f(x - x') = 0$ et donc $x - x' \in \mathrm{Ker}(f)$.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$, f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Preuve

$(\Rightarrow)$

- Supposons f injective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$.
- Mais comme f est injective, $x = 0$.

$(\Leftarrow)$

- Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- Soient alors x et x' dans E. Supposons que $f(x) = f(x')$.
- Comme f est linéaire, $f(x - x') = 0$ et donc $x - x' \in \mathrm{Ker}(f)$.
- Conclusion : $x = x'$.

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ .Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des polynômes constants
2. L'application $g : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto u_0 \end{cases}$ n'est pas injective, son noyau est l'ensemble des suites de 1er terme nul.

Sommaire

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:
$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (a, b, c) = f(x, y, z)$$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:
$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (a, b, c) = f(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + y - z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:
$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (a, b, c) = f(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + y - z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 3y + 3z = 2a - b \\ 0 = c - a \end{cases}$$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:
$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (a, b, c) = f(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + y - z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 3y + 3z = 2a - b \\ 0 = c - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c = a$$

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$:
$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$. Déterminons $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (a, b, c) = f(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x + y - z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y + z = a \\ 3y + 3z = 2a - b \\ 0 = c - a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c = a$$

Conclusion : $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, x),\ \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est

Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(f)$

Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(f)$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(f)$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(f)$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3y+3z=0 \end{cases}$$

Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(f)$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Déterminons maintenant $\mathrm{Ker}(f)$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\mathrm{Ker}(f) = \{(-y, y, -y),\ y \in \mathbb{R}\}$. Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $(-1, 1, -1)$.

Sommaire

Sommaire

Défintion

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectorielset soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **rang de** f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ lorsqu'elle est est finie. Ce réel se note $rg(f)$.

Exemples

1. Soit l'application linéaire $f : (x, y) \longrightarrow (2x + y, 3x + 5y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors $((2, 3, 0), (1, 5, 1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $rg(f) = 2$.

Exemples

1. Soit l'application linéaire $f : (x, y) \longrightarrow (2x + y, 3x + 5y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors $((2, 3, 0), (1, 5, 1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $rg(f) = 2$.
   $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\,((1, 0), (0, 1))$ *et* $f(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Vect}\,(f(1, 0), f(0, 1))$.
2. Soit l'application linéaire $D : P \longrightarrow P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Alors $rg(D) = n$.

Exemples

1. Soit l'application linéaire $f : (x, y) \longrightarrow (2x + y, 3x + 5y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors $((2, 3, 0), (1, 5, 1))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $rg(f) = 2$.
   $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\,((1, 0), (0, 1))$ *et* $f(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Vect}\,(f(1, 0), f(0, 1))$.
2. Soit l'application linéaire $D : P \longrightarrow P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Alors $rg(D) = n$.
   car $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Vect}\,(D(1), D(X), \ldots, D(X^n)) =$
   $\mathrm{Vect}\,(1, X, \ldots, X^{n-1}) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$

Sommaire

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note $G = \mathrm{Vect}((e_1, \ldots, e_n))$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $f(G)$ est engendré par la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Preuve

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note $G = \mathrm{Vect}\left((e_1, \ldots, e_n)\right)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $f(G)$ est engendré par la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Preuve

- Soit $y \in f(G)$:il existe $x \in G$ tel que $f(x) = y$.

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note $G = \mathrm{Vect}\left((e_1, \dots, e_n)\right)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $f(G)$ est engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Preuve

- Soit $y \in f(G)$:il existe $x \in G$ tel que $f(x) = y$.
- Or $G = \mathrm{Vect}\left((e_1, \dots, e_n)\right)$, donc il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note $G = \mathrm{Vect}\left((e_1, \ldots, e_n)\right)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $f(G)$ est engendré par la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Preuve

- Soit $y \in f(G)$:il existe $x \in G$ tel que $f(x) = y$.
- Or $G = \mathrm{Vect}\left((e_1, \ldots, e_n)\right)$, donc il existe n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.
- Alors $y = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$.

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note $G = \mathrm{Vect}\,((e_1, \dots, e_n))$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $f(G)$ est engendré par la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Preuve

- Soit $y \in f(G)$:il existe $x \in G$ tel que $f(x) = y$.
- Or $G = \mathrm{Vect}\,((e_1, \dots, e_n))$, donc il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.
- Alors $y = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$.
- Donc $f(G) \subset \mathrm{Vect}\,((f(e_1), \dots, f(e_n)))$.

Proposition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note $G = \mathrm{Vect}((e_1, \ldots, e_n))$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $f(G)$ est engendré par la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Preuve

- Soit $y \in f(G)$:il existe $x \in G$ tel que $f(x) = y$.
- Or $G = \mathrm{Vect}((e_1, \ldots, e_n))$, donc il existe n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.
- Alors $y = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$.
- Donc $f(G) \subset \mathrm{Vect}((f(e_1), \ldots, f(e_n)))$.
- L'inclusion réciproque est évidente, car $f(G)$ est un espace vectoriel.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que E possède une base (e_i).

1. f est surjective si et seulement si $(f(e_i))$ engendre F ;
2. f est injective si et seulement si $(f(e_i))$ est libre ;
3. f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_i))$ est une base de F ;

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Si E est de dimension finie et si f est surjective, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2. Si F est de dimension finie et si f est injective, alors E est de dimension finie et $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
3. Si E et F sont de dimension finie, et si f est un isomorphisme, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriel de dimension finie, et soient f et g dans $\mathscr{L}(E, F)$. Alors

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $rg(\lambda f) = rg(f)$
2. $rg(f + g) \leqslant rg(f) + rg(g)$

Plan de la preuve

1. Si $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{Im}(\lambda f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. Par la formule de Grassman, on a $\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g))$.
3. Alors $\dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$. Or, $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ d'où le résultat.

Sommaire

Théorème

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors

1. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont de dimension finie ;
2. $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$

Preuve

Preuve

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $p \leqslant n$ ou $n = \dim E$.

Preuve

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $p \leqslant n$ ou $n = \dim E$.
- Si $p = n$, alors $\mathrm{Ker}(f) = E$ et $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et la relation est vérifiée.

Preuve

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $p \leqslant n$ ou $n = \dim E$.
- Si $p = n$, alors $\mathrm{Ker}(f) = E$ et $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et la relation est vérifiée.
- Si $p < n$, on complète alors en une base de E : $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

Preuve

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $p \leqslant n$ ou $n = \dim E$.
- Si $p = n$, alors $\mathrm{Ker}(f) = E$ et $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et la relation est vérifiée.
- Si $p < n$, on complète alors en une base de E : $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
- Alors, $f(E) = \mathrm{Im}(f)$ est engendré par $(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$

Preuve

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $p \leqslant n$ ou $n = \dim E$.
- Si $p = n$, alors $\mathrm{Ker}(f) = E$ et $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et la relation est vérifiée.
- Si $p < n$, on complète alors en une base de E : $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
- Alors, $f(E) = \mathrm{Im}(f)$ est engendré par $(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$
- On en déduit donc que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)\right)$. Reste à prouver que $f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)$ est une famille libre

- Si $\sum_{k=1}^{n-p} \lambda_k f(e_{p+k}) = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n-p} \lambda_k e_{p+k} \in \mathrm{Ker}(f)$
- Alors comme $\mathrm{Ker}(f)$ est engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-p} = 0$.

- Si $\sum_{k=1}^{n-p} \lambda_k f(e_{p+k}) = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n-p} \lambda_k e_{p+k} \in \mathrm{Ker}(f)$
- Alors comme $\mathrm{Ker}(f)$ est engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-p} = 0$.
- Conclusion : $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - p$ et on a le résultat.

Exemples

1. Soit l'application linéaire $f : (x, y) \longrightarrow (2x + y, 3x + 5y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Il est clair que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective. On retrouve $rg(f) = 2$.
2. Soit l'application linéaire $D : P \longrightarrow P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. On trouve $\mathrm{Ker}(D) =$ ensemble des polynômes constant donc $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 1$ et $rg(D) = n$.

Corollaire 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et EGALES. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective
2. f est injective
3. f est surjective

Corollaire 2

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n alors f est un isomorphisme de E si et seulement si $rg(f) = n$.

Exemples

- $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ est surjective mais pas injective
- $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{cases}$ est injective mais non surjective

Exemples

- $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$ est surjective mais pas injective
- $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto XP \end{cases}$ est injective mais non surjective
- Soient $n+1$ scalaires $a_0, \ldots, a_n$ distincts deux à deux.
  L'application $\begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme : quels que soient les $n+1$ réels $b_0, \ldots, b_n$, il existe un polynôme unique P tel que $P(a_0) = b_0, \ldots, P(a_n) = b_n$.

Théorème

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soit $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. Si g est un isomorphisme, alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.
2. Si f est un isomorphisme, alors $rg(g \circ f) = rg(g)$.

Plan de la preuve

1. ▸ On montre que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ par double inclusion

Théorème

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soit $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. Si g est un isomorphisme, alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.
2. Si f est un isomorphisme, alors $rg(g \circ f) = rg(g)$.

Plan de la preuve

1. - On montre que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ par double inclusion
   - Par le théorème du rang, on déduit $rg(g \circ f) = rg(f)$.
2. On montre que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ par double inclusion.