Université de Montpellier & Polytech L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

Devoir encadré - 14 mars 2025

Exercice 1 : Déterminant

On considère le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Montrer que $\Delta = 77$ de 3 manières différentes :

1. en développant par rapport à la deuxième colonne,
2. en effectuant la manipulation de colonnes suivantes : $C_3 \to C_3 - 5C_1$,
3. en effectuant sur les lignes des manipulations semblables à celles proposées en (2) de manière à obtenir un déterminant de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{vmatrix}.$$

À l'aide de Δ, calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 6 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 : Endormorphisme 1

On considère l'application

$$\begin{aligned} p : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(A + A^t), \end{aligned}$$

où $M_2(\mathbb{R})$ désigne les matrices carrées de taille 2, et A^t désigne la matrice transposée de A.

1. Montrer que $p \in \mathrm{End}(M_2(\mathbb{R}))$ est une application linéaire.
2. On note $B_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice M de p dans la base B_0.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$.
4. En déduire une base B de $M_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de p est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$.

Exercice 3 : Endormorphisme 2

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ de rang 2 tel que $f \circ f = 0$.

1. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$?
2. On considère un supplémentaire F de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que F est de dimension 2.
3. On considère désormais une base $B_0 = (u_1, u_2)$ de F.
   (a) Montrer que $(f(u_1), f(u_2))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Montrer que $B = (u_1, u_2, f(u_1), f(u_2))$ est une base de E.
   (c) Exprimer la matrice de f dans la base B.