UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

☐ Licence * (L) ☐ Master * (M)

MENTION :

PARCOURS :

U. E. :

N° de la salle de cours ou de l'Amphi :

SUJET DE M. : CC1 Equa diff

Date de l'épreuve : 11/03/25

SESSION * : ☐ 1 ☐ 2

N° D'ANONYMAT : (INDISPENSABLE)

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

* Cocher la case utile

AVIS IMPORTANT :
Tout signe de reconnaissance sur la copie entraînera pour l'étudiant l'annulation de l'épreuve.

Ne pas écrire dans cette marge

NOTE

10/10

Cadre réservé au correcteur

Barème sur 11 pt

Ex 2

1 – comme $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{5}{12} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{8}{12} f(t_n, y_n) - \frac{1}{12} f(t_{n-1}, y_{n-1})\right)$$

le schéma est implicite.

1

2 – mettons le schéma sous forme standard :

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(\frac{5}{12} f_{n+2} + \frac{8}{12} f_{n+1} - \frac{1}{12} f_n\right)$$

le polynôme caractéristique associé à

$y_{n+2} - y_{n+1} = 0$ est

$\rho(z) = z^2 - z = z(z-1)$.

Ses racines sont 0 et 1 donc de module ≤ 1

De plus 1 est racine simple donc le schéma est stable.

1

Rq on peut aussi le prouver directement.
Soit $f \equiv 0$. Le schéma s'écrit :
$y_{n+1} = y_n \ \forall n$ donc $y_n \equiv y_1$
donc $\max |y_n| \leq |y_1|$ - le schéma est bien (zéro)-stable.

3- soit le polynôme caractéristique associé au second membre :

$$\sigma(z) = \frac{5}{12} z^2 + \frac{8}{12} z - \frac{1}{12}$$

$$\rho(z) = z^2 - z$$

1 On a $\rho(1) = 0$ et $\rho'(1) = 2 - 1 = 1 = \sigma(1)$
donc d'après la théorie des schémas multipas, le schéma est consistant.

4- par définition l'erreur de consistance est

$$\varepsilon(h) = y(t_n+h) - y(t_n) - h\left(\frac{5}{12} f(t_n+h, y(t_n+h)) + \frac{8}{12} f(t_n, y(t_n)) - \frac{1}{12} f(t_n-h, y(t_n-h))\right)$$

où $t \longmapsto y(t)$ est ~~la~~ solution exacte de l'équation différentielle : $y' = f(t,y)$

Ainsi

2 $$\varepsilon(h) = y(t_n+h) - y(t_n) - h\left(\frac{5}{12} y'(t_n+h) + \frac{8}{12} y'(t_n) - \frac{1}{12} y'(t_n-h)\right)$$

Effectuons des développements de Taylor, en supposant que $y(t)$ est assez régulière.

$$y(t_n+h) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + O(h^4)$$

Développons également $y'(t_n+h)$ et $y'(t_n-h)$ mais seulement à l'ordre 2, car h est en facteur

$$y'(t_n+h) = y'(t_n) + h\,y''(t_n) + \frac{h^2}{2}y'''(t_n) + O(h^3)$$

$$y'(t_n-h) = y'(t_n) - h\,y''(t_n) + \frac{h^2}{2}y'''(t_n) + O(h^3)$$

Donc

$$\mathcal{E}(h) = \cancel{y(t_n)} + \cancel{h\,y'(t_n)} + \cancel{\frac{h^2}{2}y''(t_n)} + \cancel{\frac{h^3}{6}y'''(t_n)} + O(h^4)$$
$$- \cancel{y(t_n)}$$
$$- \cancel{\frac{5}{12}h\,y'(t_n)} - \cancel{\frac{5}{12}h^2 y''(t_n)} - \cancel{\frac{5}{24}h^3 y'''(t_n)} + O(h^4)$$
$$- \cancel{\frac{8}{12}h\,y'(t_n)}$$
$$+ \cancel{\frac{h\,y'(t_n)}{12}} - \cancel{\frac{h^2 y''(t_n)}{12}} + \cancel{\frac{h^3}{24}y'''(t_n)} + O(h^4)$$

En simplifiant on obtient :

$$\mathcal{E}(h) = O(h^4)$$

Il faudrait vérifier en développant un rang de plus que $\mathcal{E}(h) \neq O(h^5)$ mais cela n'est pas demandé dans l'énoncé.

5 – D'après le théorème de convergence des schémas multipas, le schéma d'Adams-Moulton étant stable et consistant, il est convergent. De plus comme l'erreur de consistance est $O(h^4)$ le schéma est d'ordre 3, au moins.

1

Ex 1 l'erreur de consistance est :

1 – $\mathcal{E}(h) = y(t_n+h) - y(t_n) - h\left\{\dfrac{f(t_n, y(t_n)) + f(t_n+h, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)))}{2}\right\}$

1

2 – Nous montrons que $\mathcal{E}(h) = O(h^3)$.

Pour cela on effectue des développements de Taylor :

$$y(t_n+h) = y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + O(h^3)$$

$$f(t_n+h, y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))) =$$
$$f(t_n, y(t_n)) + h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y(t_n)) + h f(t_n, y(t_n)) \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y(t_n))$$
$$+ O(h^2)$$
$$f(t_n+h, y(t_n) + h f(t_n, y(t_n))) = f(t_n, y(t_n))$$
$$+ h \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right\}(t_n, y(t_n)) + O(h^2)$$

D'autre part, puisque $y(t)$ est solution de l'équation différentielle, $f(t, y(t)) = y'(t)$

et $y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))\, y'(t)$
$$y''(t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right\}(t, y(t))$$

Donc en portant dans l'expression de l'erreur de consistance :
$$\varepsilon(h) = \cancel{y(t_n)} + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} \cancel{y''(t_n)} + O(h^3)$$
$$- \cancel{y(t_n)}$$
$$- \frac{h}{2} \left[y'(t_n) + y'(t_n) + h \cancel{y''(t_n)} + O(h^2) \right]$$
$$\varepsilon(h) = 0 \cdot y(t_n) + 0 h y'(t_n) + 0 h^2 y''(t_n) + O(h^3)$$
on obtient $\varepsilon(h) = O(h^3)$ -

3- le schéma se met sous la forme d'un schéma à un pas :
$$y_{n+1} = y_n + h\, \Phi(t_n, y_n; h)$$
où $\Phi(t_n, y_n; h) = \frac{1}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n+h, y_n + h f(t_n, y_n)) \right)$

2

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

FACULTÉ DES SCIENCES

☐ Licence * (L) ☐ Master * (M)

MENTION : .... PARCOURS : ....

U. E. : .... N° de la salle de cours ou de l'Amphi : ....

SUJET DE M. : .... Date de l'épreuve : ....

SESSION * : ☐ 1 ☐ 2

N° D'ANONYMAT : (INDISPENSABLE)

N° de la copie : /

Exemple : 1/3 - 2/3

* Cocher la case utile

AVIS IMPORTANT :
Tout signe de reconnaissance sur la copie entraînera pour l'étudiant l'annulation de l'épreuve.

Ne pas écrire dans cette marge

NOTE /

Cadre réservé au correcteur

2

La fonction $y \longmapsto \phi(t,y;h)$ est lipschitzienne :

$$\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h) = \frac{1}{2}\left(f(t,y) - f(t,z)\right) + \frac{1}{2}\left(f(t+h, y+hf(t,y)) - f(t+h, z+hf(t,z))\right)$$

$$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| \leq \frac{1}{2} L|y-z| + \frac{L}{2}\left|y+hf(t,y) - z - hf(t,z)\right|$$

$$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| \leq L|y-z| + \frac{Lh}{2}|f(t,y) - f(t,z)|$$

$$'' \quad \leq L|y-z| + \frac{L^2h}{2}|y-z|$$

$$'' \quad \leq \left(L + \frac{L^2h}{2}\right)|y-z|$$

Donc pour $h \leq 1$, ϕ est lipschitz % y

et $|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| \leq M|y-z|$

avec $M = L + \frac{L^2}{2}$.

On peut donc appliquer la théorie des schémas à un pas.

Le schéma ayant une erreur de consistance $\varepsilon(h) = O(h^3)$, il est convergent et d'ordre 2.

Cela signifie que

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^2) \qquad \blacksquare$$