# Correction de fins d'exercices.

## Ex. 17. (c) Application :

Si $u_0 \in \mathbb{Q}$, alors $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \quad \text{(clair)} \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q}$.

On peut donc chercher $x$ sous la forme $u_n$.

D'après (b) on a : $\quad 0 \leq u_n - \sqrt{10} \leq 2\sqrt{10}\left(\dfrac{u_1 - \sqrt{10}}{2\sqrt{10}}\right)^{2^{n-1}}$

pour tout $n \geq 1$ (on prend $p = 1$).

Alors posons $u_0 = 3$.

On a $u_1 \underset{(a)}{\geq} \sqrt{10} \underset{\text{(évident)}}{\geq} 3$

et $u_1 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(3 + \frac{10}{3}\right)}_{\simeq 3.33\ldots} \leq 3.17$.

donc $u_1 - \sqrt{10} \leq 0{,}17$ et $\dfrac{u_1 - \sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \leq \dfrac{0{,}17}{6} \leq 0{,}1 = 10^{-1}$.

donc $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq u_n - \sqrt{10} \leq 2\sqrt{10} \cdot (10^{-1})^{2^{n-1}}$.

Comme $2\sqrt{10} \leq 10$, il suffit de prendre $n$ tq

$$(10^{-1})^{2^{n-1}} \leq 10 . 10^{-8}$$

soit, en passant au logarithme :

$$-2^{n-1} \leq -9 \quad , \text{i.e} \quad 2^{n-1} \geq 9$$

Conclusion : $n = 5$ convient ($: \ 2^4 \geq 9$)

et $x = u_5$ vérifie bien $|x - \sqrt{10}| \leq 10^{-8}$.

Ex. 17. (d). Preuve par récurrence :

- $n=1$ : on a $V_1 \underset{df}{=} \overset{0}{V_0} + e^{V_0} - 3 \leq -3.1 + e^0$

donc la relation est vraie (: on a vu que $c=0$ convient à la question (c)).

- Si l'inégalité est vraie au rang $n$. On a :

$$V_{n+1} \underset{(df)}{=} V_n + e^{V_n} - 3 \underset{(hyp.réc)}{\leq} \underbrace{-3n + \sum_{\substack{k=0 \\ e^c = e^0 = 1}}^{n-1} e^{-2k} + e^{V_n} - 3}$$

$$= -3(n+1) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k} + \underbrace{e^{V_n}}_{\leq e^{-2n}}}_{\leq \sum_{k=0}^{n} e^{-2k}}.$$

Mais (c) $\Rightarrow$ $e^{V_n} \leq e^{-2n}$; donc

Conclusion : $V_{n+1} \leq -3(n+1) + \sum_{k=0}^{n} e^{-2k}$.

$\Rightarrow$ La propriété est vraie $\forall n \geq 1$.

(e) Par (b) et (d) on a $\forall n \geq 1$,

$$-3n \leq V_n \leq -3n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k}}_{\text{somme géométrique raison } e^{-2}}$$

$$= \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}} \leq \frac{1}{1-e^{-2}}.$$

Donc $1 \leq \frac{V_n}{-3n} \leq 1 + \left(\frac{1}{-3n}\right)\frac{1}{1-e^{-2}}$

d'où $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{-3n} = 1$. Ceci montre que $V_n \sim -3n$. $\square$