Université de Montpellier
—Faculté des Sciences—
Département de Mathématiques

Année universitaire 2017-2018
Prépa Agro-Véto — HLMA509

Feuille d'exercices sur les systèmes linéaires

La « solveuse linéaire » WIMS (Web Interactive Multipurpose Server) vous permet de vérifier vos résolutions de système :

`http://wims.unice.fr/wims/fr_tool~linear~linsolver.fr.html`

Sauf mention contraire, les équations et systèmes linéaires qui suivent sont « en les variables qui apparaissent (dans cet ordre) ». Par exemple, l'équation $x+y+2z=-3$ est de manière naturelle « en x,y,z ». Mais si on précise que la variable z est traitée comme un paramètre, alors il s'agit d'une équation « en x,y ».

1. Exercices d'échauffement

Exercice 1. Les équations $xy+y=-3$ et $x+\cos(y)=0$ sont-elles linéaires ?

Exercice 2. Résoudre l'équation $x-y+z=1$ en paramétrant ses solutions de trois manières différentes : par y et z, par x et y, puis par x et z.

Exercice 3. Résoudre l'équation $y+2z-t=2$ en les variables x,y,z,t (non, il n'y a pas d'erreur d'énoncé).

Exercice 4. Le système $\begin{cases} 2x-y-3z=3 \\ 13xy-4y+z=1 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$ est-il linéaire ? Si maintenant y est vu comme un paramètre, et non comme une variable, on obtient un système en x,z. Ce nouveau système est-il linéaire ? *N.B. On ne demande pas de résoudre.*

Exercice 5. Déterminer si $(3,1,2,-1)$ et $(-4,3,5,1)$ sont solution de $\begin{cases} x+2y-z+3t=0 \\ 2x+3y-z+t=6 \\ x-y-2z+5t=-7 \end{cases}$.

Exercice 6. Déterminer l'unique solution du système $\begin{cases} x-2y-z+2t=1 \\ y+z+t=-1 \\ 2z-t=0 \\ t=1 \end{cases}$

Exercice 7. Décrire l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x-z-u+v=2 \\ y+3z-3v=1 \\ t+2u-v=-3 \end{cases}$

Exercice 8. Résoudre les systèmes $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=-3 \\ 2x+2y=-2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+y=-3 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$.

Exercice 9. Si on effectue successivement les opérations élémentaires $E_1 \leftrightarrow E_3$ et $E_2 \leftarrow E_2 + E_1$ sur le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$, l'ordre dans lequel on les prend est-il indifférent ?

2. **Exercices d'entraînement**

Exercice 10. Montrer que le système $\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - y + 2z - 3t = 4 \\ 5x - 4y + 3z - 6t = 6 \\ -x + 5y - z + t = 2 \end{cases}$ admet $(2, 1, 2, 1)$ comme unique solution.

Exercice 11. Montrer que le système $\begin{cases} x + y - 2z + 3t = 4 \\ 2x + 3y + 3z - t = 3 \\ 5x + 7y + 4z + t = 5 \end{cases}$ n'a aucune solution.

Exercice 12. Montrer que l'ensemble des solutions du système linéaire $\begin{cases} 3y - 6z + 4t + 6u = 2 \\ 3x - 7y + 8z + 8t - 5u = 5 \\ 3x - 9y + 12z + 6t - 9u = 3 \end{cases}$ peut s'écrire $\mathcal{S} = \{(9 + 2z - 3u, 2 + 2z - 2u, z, -1, u) \in \mathbb{R}^5 \mid z \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 13. Le système $\begin{cases} x - 2y = a \\ -x + y = b \\ 2x - 5y = c \end{cases}$ est vu comme un système en x et y, dans lequel b_1, b_2, b_3, b_4 jouent le rôle de paramètres (on étudie donc une *famille* de systèmes). Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres pour que ce système soit compatible (l'idée est de résoudre le système par la méthode de Gauss et de voir ce qui se passe au niveau des seconds membres).

Exercice 14. Même question que dans l'exercice précédent pour le système $\begin{cases} x + 2y + 3z = b_1 \\ 2x + 5y + 3z = b_2 \\ x + 8z = b_3 \end{cases}$, dans lequel b_1, b_2, b_3 sont des paramètres.

Exercice 15. En fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ ax + y + az = 0 \\ a^2x + ay + z = 0 \end{cases}$.

Exercice 16. Le système $\begin{cases} 2\sin x - \cos y + 3\tan z = 3 \\ 4\sin x + 2\cos y - 2\tan z = 10 \\ 6\sin x - 3\cos y + \tan z = 9 \end{cases}$ n'est pas linéaire en x, y, z. On peut néanmoins prouver qu'il n'admet pas de solution, et cela en résolvant un système linéaire. Comment ?