CORRIGÉ
EXAMEN FINAL-Session 1
(17/01/2025)

Problème 1 [6 points].

(a) [1 point] $det(A) = 1$ et donc A est inversible avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) [0,5 point] $AA^t = A^2 \neq Id$ donc A n'est pas orthogonale

(c) [1 point]

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-1) - (2-\lambda-1) + (1-(1-\lambda)) \\ &= (2_\lambda)(2-\lambda+\lambda^2-2\lambda-1) + \lambda - 2 + 1 + 1 - 1 + \lambda \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) + 2\lambda - 1 \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 1 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1). \end{aligned}$$

(d) [0,5 point] Soit $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+1)$. Il suffit de vérifier que $p(1) = p(2+\sqrt{3}) = p(2-\sqrt{3}) = 0$.

(e) [2 points] Pour $\lambda_1 = 1$,

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{rrr} x_1 & +x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 = 0 \end{array}$$

On trouve la solution la solution générale $(x_1, 0, -x_1)$.

Pour $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$,

$$(A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{rrr} -\sqrt{3}x_1 & x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & -(1+\sqrt{3})x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & -\sqrt{3}x_3 = 0 \end{array}$$

On trouve la solution générale $(x_1, \frac{2x_1}{1+\sqrt{3}}, x_1)$.

Pour $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$,

$$(A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{rrr} \sqrt{3}x_1 & x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +(\sqrt{3}-1)x_2 & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & \sqrt{3}x_3 = 0 \end{array}$$

On trouve la solution générale $(x_1, \frac{2x_1}{1-\sqrt{3}}, x_1)$.

(f) [1 point] Oui, il suffit de considérer le produit scalaire :
$(-1,0,1)\cdot(1,\frac{2}{1+\sqrt{3}},1) = -1+0+1 = 0$
$(-1,0,1)\cdot(1,\frac{2}{1-\sqrt{3}},1) = -1+0+1 = 0$
$(1,\frac{2}{1+\sqrt{3}},1)\cdot(1,\frac{2}{1-\sqrt{3}},1) = 1+\frac{4}{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}+1 = 2+\frac{4}{-2} = 2-2 = 0$

Problème 2 [5 points].

(a) [2 points]

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/6}$$

$$v = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

(b) [1 point]

$$w = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = e^{i\pi/6-i\pi/4} = e^{-i\pi/12}$$

(c) [1 point] Soit $w = x+iy$. Nous cherchons les solutions à $w^2 = (x+iy)^2 = 8-6i$. Ce qui implique que $x^2+i2xy-y^2 = 8-6i$. Ceci nous ramène à $x^2-y^2 = 8$ et $2xy = -6$. En plus, on sait que $|w^2| = |8-6i|$ obtenant $x^2+y^2 = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = 10$. En additionant cette dernière égalité avec $x^2-y^2 = 8$ on obtient $2x^2 = 18$ ou encore $x^2 = 9$ impliquant $x = \pm 3$ et on en déduit $y = \pm 1$. Comme $2xy = -6 < 0$ alors x et y ont de signe opposé.

Ainsi, les racines carrées sont $z_1 = 3-i$ et $z_2 = -3+i$.

(d) [1 point] En utilisant les racines carrées de z, on obtient :

$$-6(\sqrt{z}-2)+z-2 = -6(3-i-2)+8-6i-2 = -6+6i+8-6i-2 = 0$$

et

$$6(\sqrt{z}+2)+z-2 = 6(-3+i+2)+8-6i-2 = -6+6i+8+6i-2 = 0.$$

Problème 3 [4 points].

(a) [1 point] $f(x,y) = (x-2y)^2+(2x+y)^2 = x^2-4xy+4y^2+4x^2+4xy+y^2 = 5x^2+5y^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10y$$

A partir de $10x = 0$ et $10y = 0$ nous obtenons la solution $(0,0)$.
Maintenant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

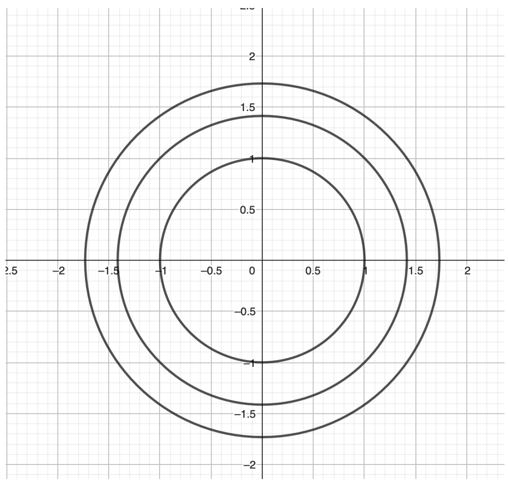
Nous avons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = (10)(10) - (0)^2 = 100 > 0$$

Alors, le point critique $(0,0)$ et soit un minimum ou bien un maximum. Or $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10 > 0$, donc $(0,0)$ est un minimum.

(b) [0,5+0,5 points] Nous avons $f(0,0) = 0$ donc $(0,0,0)$ appartient à S_f et $(0,0,2)$ n'appartient à S_f.

(c) [1 point] Nous avons un ensemble des cercles :
pour $\lambda = 5,\ 5x^2 + 5y^2 = 5$ et donc $x^2 + y^2 = 1$,
pour $\lambda = 10,\ 5x^2 + 5y^2 = 10$ et donc $x^2 + y^2 = 2$,
pour $\lambda = 15,\ 5x^2 + 5y^2 = 15$ et donc $x^2 + y^2 = 3$.



(d) [1 point] S_f correspond à la représentation (b) car les courbes de niveau induisent cette représentation et elle admet un minimum en $(0,0,0)$.

Problème 4 [4 points].

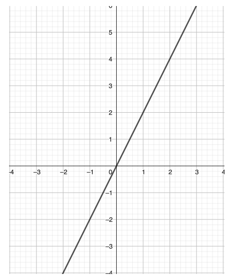
(a) [1 point] Le domaine de définition de w est $\mathbb{R}^2$ qui est bien étoilé.

(b) [1+1 points] Nous avons $w = F(x,y)dx + G(x,y)dy = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$. Alors, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 12xy = \frac{\partial G}{\partial x}$ et donc w est fermée. En plus, Donc, d'aprè le théorème de Poincaré, w est bien exacte.

Nous cherchons f telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 6xy^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 - 6x^2y$. En intégrant la dernière égalité par rapport à y on obtient que $f = xy^3 - 3x^2y^2 + c(x)$. En dérivant cette égalité par rapport à x on obtient $\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 6xy^2 + c'(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 6xy^2$ on en déduit que $c'(x) = 0$ et en intégrant par rapport à x les deux côtés de cette égalité nous obtenons $c(x) = K$ où K est une constante. D'où $f = xy^3 - 3x^2y^2 + K$.

(c) [1 point] Comme C est une courbe fermée et w est exacte alors, d'après un résultat du cours, $\int_C w = 0$ (on peut aussi calculer l'intégrale mais un peu plus long).

Problème 5 [2 points].
(a) [0,5 point]



(b) [1,5 points] Considérons la paramétrisation $x = t$ et $y = 2t$ avec $t \in [0; 1]$. Alors $dx = dt$ et $dy = 2dt$, ainsi

$$\begin{aligned}
\int_C y\sin(x)\ dx + x\cos(y)\ dy &= \int_0^1 2t(\sin(t)) + t\cos(2t)2dt \\
&= 2\int_0^1 t(\sin(t) + \cos(2t))dt \\
&\text{(IPP) avec } u = t, u' = dt, v' = \sin(t) + \cos(2t), v = -\cos(t) + \tfrac{1}{2}\sin(2t) \\
&= 2[t(-\cos(t) + \tfrac{1}{2}\sin(2t))]_0^1 - 2\int_0^1 -\cos(t) + \tfrac{1}{2}\sin(2t)dt \\
&= -2\cos(1) + \sin(2) + \int_0^1 2\cos(t) - \sin(2t)dt \\
&= -2\cos(1) + \sin(2) + [2\sin(t) + \tfrac{1}{2}\cos(2t)]_0^1 \\
&= -2\cos(1) + \sin(2) + 2\sin(1) + \tfrac{1}{2}\cos(2) - \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Problème 6 [3 points].
[1 point] Nous avons $y'(t) - \frac{2t+1}{t^2+t}y(t) = t$. L'équation homogène est $y'(t) - \frac{2t+1}{t^2+t}y(t) = 0$ ou encore $y'(t) = \frac{2t+1}{t^2+t}y(t)$ dont les solutions sont :

$$y(t) = Ce^{\int \frac{2t+1}{t^2+t}dt} = Ce^{\ln(t^2+t)} = C(t^2+t), \quad C \in \mathbb{R}$$

[1 point] On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_0(t) = C(t)(t^2+t)$$

On a $y_0'(t) - \frac{2t+1}{t^2+t}y_0(t) = t$ alors

$$C(t)(2t+1) + (t^2+t)C'(t) - \frac{2t+1}{t^2+t}C(t)(t^2+1) = t$$

d'où $(t^2+t)C'(t) = t$ ou encore $C'(t) = \frac{t}{t^2+t} = \frac{t}{t(t+1)} = \frac{1}{t+1}$. En intégrant par rapport à t nous obtenons

$$C(t) = \ln(t+1) + K, K \in \mathbb{R}$$

En posant $K = 0$, nous avons $y_0(t) = \ln(t+1)(t^2+t)$.
[1 point] On a qu'une solution générale est

$$y(t) = \ln(t+1)(t^2+t) + C(t^2+t)$$

En utilisant que pour $t = 1$ on a $y = 0$ alors $0 = 2\ln 2 + 2C$ obtenant $C = -\frac{1}{\ln 2}$. Donc, la solution générale est

$$y(t) = \ln(t+1)(t^2+t) - \frac{1}{\ln 2}(t^2+t).$$