Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Licence 2 - HAC310X Mathématiques pour la Chimie

EXAMEN FINAL-Session 1

(17/01/2025)

Durée : 2 h 00

Calculatrices, documents et portables interdits

(Justifier toutes les réponses)

Problème 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) A est-elle inversible ? Si c'est le cas, calculer son inverse.

(b) A est-elle orthogonale ?

(c) Calculer $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

(d) En déduire que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2+\sqrt{3}$ et $\lambda_3 = 2-\sqrt{3}$.

(e) Déterminer les vecteurs propres correspondants, c'est-à-dire, les solutions de $Ax = \lambda x$ pour chaque valeur propre λ.

(f) Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres de A, sont-ils orthogonaux ?

Problème 2. Soit $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1+i$.

(a) Exprimer u et v sous les formes polaire et exponentielle.

(b) En déduire la forme exponentielle de $w = \frac{u}{v}$.

(c) Trouver les racines carrés de $z = 8-6i$ dans $\mathbb{C}$.

(d) Est-il vrai que $-6(\sqrt{z}-2)+z-2=0$? Qu'en est-il pour $6(\sqrt{z}+2)+z-2=0$?

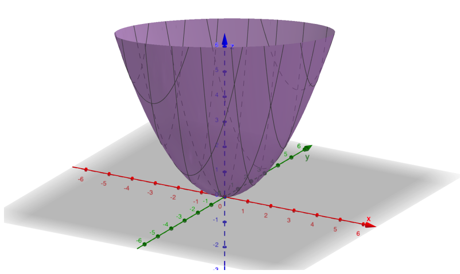
Problème 3. Soit $f(x,y) = (2x-y)^2 + (x+2y)^2$.

(a) Déterminer les extrema locaux de $f(x,y)$ et leur nature.

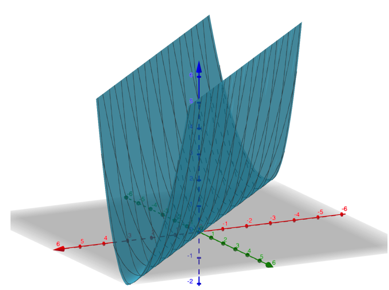
(b) La surface-graphe S_f contient-elle l'origine ? et le point $(0,0,1)$?

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et C_λ la courbe de niveau λ de $f(x,y)$. Donner l'équation de C_λ et tracer C_λ pour $\lambda = 5, 10, 15$

(d) S_f correspond-t-elle à l'une des deux représentions ci-dessous ? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de S ? (justifiez votre réponse).



(a)



(b)

Tournez S.V.P.

Problème 4. On considère la forme différentielle

$$w = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$$

(a) Dans quel domaine w est-elle définie ? Ce domaine est-il étoilé ?

(b) La forme w est-elle exacte ? Si c'est le cas chercher f tel que $df = w$.

(c) Calculer $\int_C w$ où C est le cercle de centre 0 et rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct (justifiez votre réponse).

Problème 5. Soit C la droite d'équation $y = 2x$ joignant les points $(0, 0)$ et $(1, 2)$.
(a) Tracer la courbe C.
(b) Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C y\sin(x)\ dx + x\cos(y)\ dy$$

le long du C parcouru une fois dans le sens des x croissants (*indication :* on pourra paramétrer $x = t$ et ensuite faire une intégration par parties.)

Problème 6. On souhaite résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) - \frac{2t+1}{t^2+t}y(t) = t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(a) Trouver les solutions de l'équation homogène associée.
(b) Trouver une solution de l'équation complète.
(c) En déduire la solution de l'équation complète satisfaisant la condition initiale.

Valeurs remarquable des $\sin, \cos$ et $\tan$.

θ en degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$
θ en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	0	0