Algorithmique avancée

TD sur la complexité paramétrée

Exercice 1. *IS dans les graphes de degré maximum borné*
On considère le problème paramétré suivant noté IS_{dec}/Δ :

- entrée : un graphe G, un entier k
- paramètre : $\Delta(G)$ (degré maximum)
- question : décider si $opt(G) \geq k$, c'est à dire si il existe un stable de taille au moins k

Q1. Montrer que IS_{dec}/Δ est polynomial pour $\Delta = 1$ et $\Delta = 2$.

Il est connu que IS_{dec} est NP-Complet pour les graphes de degré maximum 3.

Q2. Peut on continuer la question précédente pour tout Δ et montrer que IS_{dec}/Δ est XP ? Peut on continuer la question précédente pour tout Δ et montrer que IS_{dec}/Δ est FPT ?

Il est connu que IS_{dec}/k n'est pas FPT (sous des hypothèses de complexité classiques). Il n'y a donc pas d'espoir que IS_{dec} soit FPT, ni par Δ, ni par k. Cependant, nous allons jouer avec les deux paramètres en même temps.

Q3. A t-on un espoir de trouver un algorithme en

- $\mathcal{O}(k^{\Delta} poly(n))$?
- $\mathcal{O}(\Delta^{k} poly(n))$?
- $\mathcal{O}(2^{k\Delta} poly(n))$?

Considérons un algorithme glouton qui, tant qu'il reste des sommets, rajoute un sommet arbitraire, et supprime ce sommet et ses voisins. Soit S le stable obtenu. Si $|S| \geq k$, on retourne true. Considérons donc le cas où $|S| < k$. Soit $N(S) = \{u \text{ voisins d'un sommet de } S\}$ et $N[S] = S \cup N(S)$.

Q4. Que vaut $N[S]$?

Q5. Par quoi peut on majorer $|N[S]|$?

Q6. En déduire un algorithme en $\mathcal{O}(((k-1)(\Delta+1))^k poly(n))$.

On va améliorer la complexité précédente.

Q7. Soit v un sommet. Montrer qu'on a toujours intérêt à utiliser au moins un sommet de $N[v]$. Plus formelement, montrer que si pour tout stable S, il existe un stable $S' \supseteq S$ tel que $S' \cap N[v] \neq \emptyset$.

Q8. Soit (G, k) une entrée de IS_{dec}. Supposons G non vide, et soit v un sommet. Soit $N[v] = \{u_1, \ldots, u_x\}$. Pour tout $u_i \in N[v]$, soit $G_i = G \setminus N[u_i]$ le graphe obtenu en enlevant u_i et tous ses voisins. Soit $G_0 = G \setminus N[v]$. Considérons l'algorithme $A(G, k)$ qui branche et retourne $A(G_0, k-1) \vee \ldots \vee A(G_x, k-1)$. Montrer que ce branchement est correct, c'est à dire que

$$(G, k) \text{ OUI-instance } \Leftrightarrow \exists i \geq 0 \text{ tel que } (G_i, k-1) \text{ OUI-instance}$$

.

Q9. En déduire un algorithme de branchement en $\mathcal{O}((\Delta+1)^k poly(n))$.