

TD 11-12 : Perturbations dépendantes du temps. Interactions atome-rayonnement

Exercice 22 : Collision de deux spins

On étudie deux particules de spin $\frac{1}{2}$ entrant en collision. les spins sont notés $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ et l'on considère que durant la collision l'interaction entre les deux spins prend la forme :

$$V = a\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

où a est constant et est non nul uniquement durant la collision qui a lieu dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$.

Au temps $t = -\infty$ le système est considéré être dans l'état $|+, -\rangle$ état propre de S_{1z} (S_{2z}) avec la valeur propre $+\frac{\hbar}{2}$ ($-\frac{\hbar}{2}$).

1) En utilisant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre, calculer la probabilité $P(|+, -\rangle \rightarrow |-, +\rangle)$ de trouver à $t = +\infty$ le système dans l'état $|-, +\rangle$. Il est précisé que l'hamiltonien d'interaction V n'est pas diagonal dans la base $\{|\pm, \pm\rangle\}$ et qu'il convient d'exprimer le vecteur $|+, -\rangle$ dans la base $|S, M_S\rangle$ avec $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ le spin total.

2) Vérifier que l'on retrouve le résultat donné par la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre pour une perturbation constante branchée à $t = 0$. On rappelle que dans un tel cas la probabilité de transition $P(|i\rangle \rightarrow |f\rangle)(t)$ d'un état initial $|i\rangle$, d'énergie E_i , vers un état final $|f\rangle$, d'énergie E_f , vaut :

$$P(|i\rangle \rightarrow |f\rangle) = \frac{4|\langle f|V|i\rangle|^2}{\Delta E^2} \sin^2 \frac{\Delta E t}{2\hbar},$$

avec $\Delta E = E_f - E_i$.

3) Comparer le résultat en perturbation au résultat sans approximation. Donner la condition de validité de la solution en perturbation.

Exercice 23 : Rapport gyromagnétique d'une particule neutre de spin $\frac{1}{2}$

On considère un neutron de spin $\frac{1}{2}$ se déplaçant à la vitesse v dans la direction Ox . Cette particule est soumise à un champ magnétique constant B_0 dirigé selon Oz et dans une région limitée de l'espace à un champ oscillant $\mathbf{B}(x, t) = B_1 e^{-\frac{|x|}{a}} (\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y)$, avec $B_1 \ll B_0$. Les états propres de la projection S_z du spin dans la direction Oz seront notés $|\pm\rangle$. L'hamiltonien d'interaction vaut $-ge\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}/2mc$, avec e la charge élémentaire, g et m respectivement le facteur gyromagnétique et la masse du proton. On posera $\omega_i = -geB_i/2mc$.

1) En traitant B_1 comme une perturbation et en limitant le développement en perturbation au premier ordre, calculer l'amplitude de probabilité d'une transition vers l'état $|+\rangle$ à $t = +\infty$ pour une particule dans l'état $|-\rangle$ à $t = -\infty$.

2) On mesure la probabilité $P(|-\rangle \rightarrow |+\rangle)$ d'une telle transition. Tracer cette probabilité en fonction de $\omega - \omega_0$. Exprimer la largeur de la courbe en fonction de v et a et donner une interprétation de cette largeur.

On rajoute une seconde zone de champ oscillant décalée de b telle que $\mathbf{B}'(x, t) = \mathbf{B}(x - b, t)$.

3) Montrer que la nouvelle probabilité présente des oscillations.

4) Discuter en quoi utiliser deux zones de champs oscillants augmente la précision sur la détermination de ω_0 . Donner une expression de la précision avec laquelle est mesurée le facteur gyromagnétique de la particule.

5) Appliquer à un neutron de vitesse $v = 10^2 m.s^{-1}$, dans un champ de $10^4 G$. Sachant que la mesure donne $g = -3.8260840 \pm 0.0000018$ quel est l'ordre de grandeur de b ?

Exercice 24 : Temps de vie du niveau $2p$ de l'atome d'hydrogène

Des mesures expérimentales indiquent que le temps de vie de la transition dipolaire électrique $2p \rightarrow 1s$ (transition Lyman α , $121.5nm$) vaut $(1.600 \pm 0.004) \times 10^{-9} s$ (Bickel and Goodman, *Phys. Rev.*, **148** (1966) 1).

Le taux d'émission spontanée $w_{i \rightarrow n}$ dans une transition dipolaire électrique $|i\rangle \rightarrow |n\rangle$ vaut

$$w_{i \rightarrow n} = 2\alpha \frac{\omega^3}{c^2} |\langle n | \epsilon \cdot \mathbf{x} | i \rangle|^2,$$

avec $\alpha = e^2/\hbar c$, ω la "fréquence" de la transition, ϵ la direction de polarisation.

On veut calculer le temps de vie de la transition $2p \rightarrow 1s$. On considère que l'état initial est non polarisé, ce qui signifie que l'état atomique initial est un mélange équiprobable des états $m = 0, \pm 1$.

a) Il est indiqué que la transition est dipolaire électrique. Pourquoi ne peut-elle pas être dipolaire magnétique ($H_{DM} \propto \langle n | \mathbf{L} + 2\mathbf{S} | i \rangle \cdot \mathbf{B}$) ou quadrupolaire électrique ($H_{QE} \propto \mathbf{k} \cdot \langle n | \mathbf{x}\mathbf{x} | i \rangle \cdot \mathbf{E}$) ? (Les fonctions d'ondes utiles sont données dans l'exercice 8). Justifier l'approximation dipolaire électrique pour cette transition.

b) Ecrire l'opérateur dipolaire $\epsilon \cdot \mathbf{x}$ en termes de polarisations circulaires et linéaires. puis en termes d'harmoniques sphériques. On rappelle : $Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$, $Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$.

c) Réalisez qu'il n'y a que trois éléments de matrice à calculer. Ces éléments de matrice sont tous identiques. En déduire $\langle 1s | \epsilon \cdot \mathbf{x} | 2p, m \rangle$.

d) Donner une expression du temps de vie $\tau_{2p \rightarrow 1s}$. Pour tenir compte du fait que le rayonnement est émis dans toutes les directions de l'espace et des deux directions de polarisations orthogonales il faut introduire un facteur $2/3$.

e) Comparer l'application numérique aux mesures expérimentales. Conclusion ?

Exercice 25 : Règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn

La règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn est une conséquence fondamentale de la relation de commutation position-impulsion pour un électron atomique, elle implique une contrainte importante sur les éléments de matrice des transitions atomiques de laquelle découle la relation $\sum_n f_{ni} = 1$ sur les forces d'oscillateur des transitions.

En physique atomique on définit la force d'oscillateur d'une transition, f_{ni} , comme

$$f_{ni} = \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle n | X | i \rangle|^2$$

En supposant un hamiltonien non perturbé $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(|\mathbf{X}|)$ et après avoir calculé $[X, [X, H]]$ montrer que $\sum_n f_{ni} = 1$.