TD 11-12 : Perturbations dépendantes du temps. Interactions atome-rayonnement

Exercice 22 : Collision de deux spins

On étudie deux particules de spin $\frac{1}{2}$ entrant en collision. les spins sont notés $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ et l'on considère que durant la collision l'interaction entre les deux spins prend la forme :

$$V = a\mathbf{S}_1.\mathbf{S}_2,$$

où a est constant et est non nul uniquement durant la collision qui a lieu dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$.

Au temps $t = -\infty$ le système est considéré être dans l'état $|+,-\rangle$ état propre de S_{1z} (S_{2z}) avec la valeur propre $+\frac{\hbar}{2}$ ($-\frac{\hbar}{2}$).

1) En utilisant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre, calculer la probabilité $P(|+,-\rangle \to |-,+\rangle)$ de trouver à $t = +\infty$ le système dans l'état $|-,+\rangle$. Il est précisé que l'hamiltonien d'interaction V n'est pas diagonal dans la base $\{|\pm,\pm\rangle\}$ et qu'il convient d'exprimer le vecteur $|+,-\rangle$ dans la base $|S, M_S\rangle$ avec $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ le spin total. (Voir TD 3 pour les coefficients de Clebsch-Gordan).

2) Vérifier que l'on retrouve le résultat donné par la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre pour une perturbation constante branchée à $t = 0$. On rappelle que dans un tel cas la probabilité de transition $P(|i\rangle \to |f\rangle)(t)$ d'un état initial $|i\rangle$, d'énergie E_i, vers un état final $|f\rangle$, d'énergie E_f, vaut :

$$P(|i\rangle \to |f\rangle) = \frac{4|\langle f|V|i\rangle|^2}{\Delta E} \sin^2 \frac{\Delta E t}{2\hbar},$$

avec $\Delta E = E_f - E_i$.

3) Comparer le résultat en perturbation au résultat sans approximation. Donner la condition de validité de la solution en perturbation.

Exercice 23 : Rapport gyromagnétique d'une particule neutre de spin $\frac{1}{2}$

On considère une particule neutre de spin $\frac{1}{2}$ se déplaçant à la vitesse v dans la direction Ox. Cette particule est soumise à un champ magnétique constant B_0 dirigé selon Oz et dans une région limitée de l'espace à un champ oscillant $\mathbf{B}(x,t) = B_1 e^{-\frac{|x|}{a}}(\cos(\omega t))\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y)$, avec $B_1 << B_0$. Les états propres de la projection S_z du spin dans la direction Oz seront notés $|\pm\rangle$. L'hamiltonien d'interaction vaut $-ge\mathbf{S}.\mathbf{B}/2mc$, avec e la charge élémentaire, g et m respectivement le facteur gyromagnétique et la masse de la particule. On posera $\omega_i = -geB_i/2mc$.

1) En traitant B_1 comme une perturbation et en limitant le développement en perturbation au premier ordre, calculer l'amplitude de probabilité d'une transition vers l'état $|+\rangle$ à $t = +\infty$ pour une particule dans l'état $|-\rangle$ à $t = -\infty$.

2) On mesure la probabilité $P(|-\rangle \to |+\rangle)$ d'une telle transition. Tracer cette probabilité en fonction de $\omega - \omega_0$. Exprimer la largeur de la courbe en fonction de v et a et donner une interprétation de cette largeur.

On rajoute une seconde zone de champ oscillant décallée de b telle que $\mathbf{B}'(x,t) = \mathbf{B}(x-b,t)$.

3) Montrer que la nouvelle probabilité présente des oscillations.

4) Discuter en quoi utiliser deux zones de champs oscillants augmente la precision sur la détermination de ω_0. Donner une expression de la précision avec laquelle est mesurée le facteur gyromagnétique de la particule.

5) Appliquer à un neutron de vitesse $v = 10^2 m.s^{-1}$, dans un champ de $10^4 G$. Sachant que la mesure donne $g = -3.8240836 \pm 0.0000018$ quel est l'ordre de grandeur de b ?

Exercice 24 : Temps de vie du niveau $2p$ de l'atome d'hydrogène

Des mesures expérimentales indiquent que le temps de vie de la transition dipolaire électrique $2p \to 1s$ (transition Lyman α, $121.5nm$) vaut $(1.600 \pm 0.004) \times 10^{-9}s$ (Bickel and Goodman, *Phys. Rev.*, **148** (1966) 1).

Le taux d'émission spontanée $w_{i\to n}$ dans une transition dipolaire électrique $|i\rangle \to |n\rangle$ vaut

$$w_{i\to n} = 2\alpha \frac{\omega^3}{c^2} |\langle n|\epsilon.\mathbf{x}|i\rangle|^2,$$

avec $\alpha = e^2/\hbar c$, ω la "fréquence" de la transition, ϵ la direction de polarisation.

On veut calculer le temps de vie de la transition $2p \to 1s$. On considère que l'état initial est non polarisé, ce qui signifie que l'état atomique initial est un mélange équiprobable des états $m = 0, \pm 1$.

a) Il est indiqué que la transition est dipolaire électrique. Pourquoi ne peut-elle pas être dipolaire magnétique ($H_{DM} \propto \langle n|\mathbf{L} + 2\mathbf{S}|i\rangle .\mathbf{B}$) ou quadrupolaire électrique ($H_{QE} \propto \mathbf{k}.\langle n|\mathbf{xx}|i\rangle .\mathbf{E}$) ? (Les fonctions d'ondes utiles sont données dans l'exercice 8). Justifier l'approximation dipolaire électrique pour cette transition.

b) Ecrire l'opérateur dipolaire $\epsilon.\mathbf{x}$ en termes de polarisations circulaires et linéaires. puis en termes d'harmoniques sphériques. On rappelle : $Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$, $Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$, $Y_l^{-m} = (-1)^m [Y_l^m]^*$.

c) Réalisez qu'il n'y a que trois éléments de matrice à calculer. Ces éléments de matrice sont tous identiques. En déduire $\langle 1s|\epsilon.\mathbf{x}|2p, m\rangle$.

d) Donner une expression tu temps de vie $\tau_{2p\to 1s}$. Pour tenir compte du fait que le rayonnement est émis dans toutes les directions de l'espace et des deux directions de polarisations orthogonales il faut introduire un facteur $2/3$.

e) Comparer l'application numérique aux mesures expérimentales. Conclusion ?

Exercice 25 : Règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn

La règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn est une conséquence fondamentale de la relation de commutation position-impulsion pour un électron atomique, elle implique une contrainte importante sur les éléments de matrice des transitions atomiques de laquelle découle la relation $\sum_n f_{ni} = 1$ sur les forces d'oscillateur des transitions.

En physique atomique on défini la force d'oscillateur d'une transition, f_{ni}, comme

$$f_{ni} = \frac{2m\omega_{ni}}{\hbar} |\langle f|X|i\rangle|^2$$

En supposant un hamiltonien non perturbé $H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(|\mathbf{X}|)$ et après avoir calculé $[X,[X,H]]$ montrer que $\sum_n f_{ni} = 1$.