TD de mathématiques pour économistes 2

Licence 1 Economie

Mickael Beaud
Université de Montpellier

January 7, 2025

Thème 2. Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- Séance de TD N°6. Conditions du premier ordre
- Séance de TD N°7. Conditions du premier ordre (applications économiques)
- Séance de TD N°8. Conditions du second ordre
- Séance de TD N°9. Restrictions directes sur les variables

Séance de TD N°6. Conditions du premier ordre

1. Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes:

   (a) $y = x_1 x_2$

   (b) $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5$

   (c) $y = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 1$

   (d) $y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1 x_2$

   (e) $y = \frac{1}{2}x_1 - 2x_1^2 + 4x_2 - 3x_2^2 + 2x_1 x_2$

   (f) $y = 2x_1^3 - 3x_1 x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$

   (g) $y = \left[x_1^2 + x_2^4 + x_3^6\right]^2$

   (h) $y = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1 + 5x_3$

   (i) $y = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2$

   (j) $y = 2\left[x_1 - x_2\right]^2 - x_1^4 - x_2^4$

Séance de TD N°7. Conditions du premier ordre

1. Une entreprise produit un bien qu'elle vend sur deux marchés séparés. Le marché 1 est un marché concurrentiel où le prix de vente unitaire est $p_1 = 60$. Le marché 2 est un marché où l'entreprise est en situation de monopole, avec une demande inverse $p_2(q_2) = 100 - q_2$, où q_2 est la quantité vendue sur le marché 2. La fonction de coût total de l'entreprise est $C(q_1 + q_2) = [q_1 + q_2]^2$, où q_1 est la quantité vendue sur le marché concurrentiel 1. La fonction de profit de l'entreprise s'écrit:

$$\pi(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2(q_2) q_2 - C(q_1 + q_2)$$

   (a) Calculer les quantités qui maximisent le profit de l'entreprise. Observer que l'entreprise égalise sa recette marginale sur les deux marchés. Observer également qu'elle égalise sa recette marginale à son coût marginal. Commenter.

   (b) Supposons que le prix concurrentiel chute et devient $p_1 = 10$. Calculer les quantités qui maximisent le profit de l'entreprise. Commenter.

2. Deux entreprises en situation de duopole produisent un même bien qu'elles vendent sur un marché dont la demande est $p(q_1 + q_2) = 10 - \frac{1}{10}[q_1 + q_2]$, où q_1 est la quantité produite par l'entreprise 1, et q_2 est la quantité produite par l'entreprise 2. Leurs fonctions de coût total sont $C_1(q_1) = \frac{1}{4} q_1$ pour l'entreprise 1, et $C_2(q_2) = \frac{1}{2} q_2$ pour l'entreprise 2. La fonction de profit de l'entreprise 1 s'écrit:

$$\pi^1(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2) q_1 - C_1(q_1)$$

   La fonction de profit de l'entreprise 2 s'écrit:

$$\pi^2(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2) q_2 - C_2(q_2)$$

   (a) Déterminer l'équilibre de Cournot.

   (b) Les firmes décident de s'entendre et se comportent comme un monopole. La fonction de profit de l'entente s'écrit:

$$\Pi(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)[q_1 + q_2] - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

   Calculer l'équilibre.

   (c) Comparer les deux équilibres. Commenter.

3. Un monopole monoproduit fait face à une demande $p(Q) = 100 - Q$. Le monopole produit la quantité $Q = q_1 + q_2$ à partir de deux sites de production, la quantité q_1 sur le site 1 et la quantité q_2 sur le site 2, avec $Q = q_1 + q_2$. Le site de production 1 réalise la quantité q_1 pour un coût total $C_1(q_1) = 2q_1^2$. Le site de production 2 réalise la quantité q_2 pour un coût total $C_2(q_2) = 3q_2^2$. La fonction de profit du monopole monoproduit s'écrit:

$$\pi(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)[q_1 + q_2] - C_1(q_1) - C_2(q_2)$$

(a) Etablir les conditions du premier ordre nécessaires à la maximisation du profit et calculer l'équilibre.

(b) Comparer le coût marginal des deux sites de production à l'équilibre. Commenter.

Séance de TD N°8. Conditions du second ordre

1. Considérer les dix fonctions de l'exercice 1 ci-dessus (séance de TD N°6, conditions du premier ordre) pour lesquelles nous avons identifié les points stationnaires. Dans chaque cas, déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, local ou global?

2. Montrer que la fonction de profit du monopole multiproduit (**Section 2.1** du CM):

$$\pi(x_1, x_2) = -\frac{5}{7}x_1^2 - \frac{2}{7}x_2^2 - \frac{4}{7}x_1x_2 + \frac{550}{7}x_1 + \frac{400}{7}x_2 - 50$$

   est strictement concave. En déduire que l'équilibre identifié dans le CM est un maximum global.

3. Montrer que la fonction de profit dans l'Exercice 4 ci-dessus (conditions du premier ordre) est strictement concave. En déduire que l'équilibre identifié est un maximum global.

4. Une entreprise opérant sur des marchés concurrentiels produit un bien en quantité y, vendu au prix unitaire $p = 64$, en utilisant deux facteurs de production, le travail en quantité L, acheté au prix unitaire $w = 2$, et le capital en quantité K, acheté au prix unitaire $r = 4$. La fonction de production de l'entreprise est de type Cobb-Douglas $y = L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}}$. La fonction de profit sécrit:

$$\pi(L, K) = pL^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}} - wL - rK$$

   (a) Etablir les conditions du premier ordre nécessaires à la maximisation du profit. Calculer les quantités optimales de facteurs utilisées.

   (b) Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.

   (c) On suppose désormais que la fonction de production est $y = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}$. Quel problème apparaît? Commenter.

Séance de TD N°9. Restrictions directes sur les variables

1. Résoudre les problèmes suivants:

   (a) $\min\limits_{x_1,x_2} : y = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 10,\ 2 \leq x_2 \leq 10$

   (b) $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1$

   (c) $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 \quad s.c.\ 1 \leq x_1 \leq 2,\ 1 \leq x_2 \leq 2$

   (d) $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1 + x_2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 1 \leq x_2 \leq 2$

   (e) $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1^3 - 3x_1x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1$

   (f) $\max\limits_{x_1,x_2} : y = 2x_1^3 - 3x_1x_2 + x_1^2 - 2x_2^2 \quad s.c.\ 0 \leq x_1 \leq 1,\ 1 \leq x_2 \leq 2$