TD de mathématiques pour économistes 2

Licence 1 Economie

Mickael Beaud
Université de Montpellier

January 7, 2025

Thème 1. Calcul pour les fonctions à plusieurs variables

- Séance de TD N°1. Dérivées partielles d'ordre 1
- Séance de TD N°2. Dérivées partielles d'ordre 2
- Séance de TD N°3. Différentielle totale d'ordre 1
- Séance de TD N°4. Propriétés de courbure (concavité et convexité)
- Séance de TD N°5. D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

Séance de TD N°1. Dérivées partielles d'ordre 1

1. Soit une entreprise commercialisant deux biens, le bien 1 et le bien 2, sur un marché concurrentiel. On note x_i la quantité de bien i vendue et p_i le prix de marché du bien i, avec $i = 1, 2$. La fonction de recette totale de l'entreprise s'écrit
$$R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$$
Quelle est la forme particulière de cette fonction? A quoi ressemble cette fonction dans l'espace à trois dimensions? Que pouvez vous en conclure concernant ses dérivées partielles? En utilisant la définition par la limite (**Définition 1**), calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de cette fonction. Donner une interprétation économique de ces dérivées partielles d'ordre 1.

2. En utilisant la définition par la limite (**Définition 1**), calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction
$$y = x_1^2 x_2$$

3. En utilisant les formules de dérivation usuelles (i.e. sans passer par la **Définition 1**), calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes:
$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 5x_2$$
et
$$g(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 6x_2 + e^{x_3}$$
Que constatez-vous de particulier? Pourquoi?

4. Soit une fonction de production de type Cobb-Douglas à trois facteurs
$$y = x_1^{1/2} x_2^{1/3} x_3^{1/4}$$
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1. Quelle est leur interprétation économique?

5. Soit une fonction de production de type Cobb-Douglas à N facteurs
$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N) = A \prod_{n=1}^{N} x_n^{\alpha_n}$$
où les paramètres vérifient $A > 0$ et $0 < \alpha_n < 1$ pour $n = 1, 2, ..., N$. Montrer que la productivité marginale d'un facteur i quelconque f_i est égale à $\frac{\alpha_i}{x_i} y$. En déduire que le Taux Marginal de Substitution Technique $\text{TMST}_{j,i} = f_i / f_j$ est égal à $\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \frac{x_j}{x_i}$. En déduire que l'élasticité de substitution $\sigma_{j,i} = \left[d\left(\frac{x_j}{x_i}\right) / \frac{x_j}{x_i} \right] / \left[d\text{TMST}_{j,i} / \text{TMST}_{j,i} \right]$ est égale à 1 dans le cas Cobb-Douglas.

6. Soit une fonction de production de type CES à deux facteurs

$$y = 12\left[\frac{4}{10}x_1^{-\frac{1}{2}} + \frac{6}{10}x_2^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}$$

Calculer la productivité marginale de chaque facteur. En déduire le Taux Marginal de Substitution Technique $\textsc{tmst}_{2,1}$. Sans faire de calcul, en procédant par analogie (voir **Exemple 7**), montrer que l'élasticité de substitution $\sigma_{2,1}$ est égale à $\frac{2}{3}$. Les facteurs sont-ils plus ou moins facilement substituables que dans le cas d'une fonction de production Cobb-Douglas? Interpréter graphiquement ce résultat en terme de courbure convexe des isoquantes de production.

7. Soit une fonction de production de type CES à trois facteurs

$$y = A\left[\omega_1 x_1^{-r} + \omega_2 x_2^{-r} + \omega_3 x_3^{-r}\right]^{-1/r}$$

où $A > 0$, $r > -1$, $0 < \omega_i < 1$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$. Calculer la productivité marginale de chaque facteur.

Séance de TD N°2. Dérivées partielles d'ordre 2

1. Soit une fonction linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des constantes quelconques. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Interpréter les résultats.

2. Soit une fonction non-linéaire à deux variables

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^4$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_2 F = H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

3. Soit une fonction non-linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^4 x_3^5$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla_2 F = H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

4. Soit une fonction non-linéaire à deux variables

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne.

5. Soit une fonction non-linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des constantes quelconques. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Arranger les résultats sous forme de gradient et de matrice Hessienne.

6. Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs:

$$y = 50 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Déterminer leurs signes et en donner une interprétation économique.

7. Soit une fonction de production Cobb-Douglas à trois facteurs:

$$y = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$$

où $A > 0$ et $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Déterminer leurs signes et en donner une interprétation économique.

8. Soit une fonction non-linéaire à trois variables

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{3x_2 + x_1 x_3} + 2\frac{x_2^3}{x_1}$$

Vérifier le **Théorème 1**.

Séance de TD N°3. Différentielle totale d'ordre 1

1. Soit une fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$ définie sur $\mathbb{R}^2_+$ et vérifiant $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$. Quelle égalité définit implicitement l'équation d'une courbe de niveau $\overline{y}$? Discuter le lien entre la représentation graphique de la fonction dans l'espace à trois dimensions, i.e., le repère (x_1, x_2, y), et celle de la courbe de niveau $\overline{y}$ dans le plan, i.e., le repère (x_1, x_2). Calculer la différentielle totale d'ordre 1. En déduire que la pente d'une courbe de niveau $\overline{y}$, dans le repère (x_1, x_2), vaut $-\frac{f_1}{f_2}$.

2. Soit une fonction d'utilité linéaire à deux biens:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

   où a et b sont des constantes positives. Quelle est la forme de cette fonction dans l'espace à trois dimensions? Donner l'équation et faire une représentation graphique de la courbe de niveau $\overline{u}$ dans le repère (x_1, x_2). Calculer sa pente. Discuter le lien entre la représentation graphique de la fonction d'utilité dans l'espace à trois dimensions et celle de la courbe de niveau $\overline{u}$ dans le plan. Calculer la différentielle totale d'ordre 1 de la fonction d'utilité et en déduire la pente de la courbe de niveau $\overline{u}$ dans le repère (x_1, x_2). Observer que les deux méthodes donnent le même résultat.

3. Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

   Quelle est la forme de cette fonction dans l'espace à trois dimensions? Donner l'équation et faire une représentation graphique de la courbe de niveau $\overline{y}$ dans le repère (x_1, x_2). Calculer sa pente. Calculer la différentielle totale d'ordre 1 de la fonction de production et en déduire la pente de la courbe de niveau $\overline{y}$ dans le repère (x_1, x_2). Observer que les deux méthodes donnent le même résultat.

4. Soit une fonction de production Cobb-Douglas à trois facteurs

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

   Donner l'équation et faire une représentation graphique de la courbe de niveau $\overline{y}$ (avec $x_1 = \overline{x}_1$) dans le repère (x_2, x_3). Utiliser la dérivée partielle d'ordre 1 pour calculer sa pente (avec $x_1 = \overline{x}_1$).Utiliser la différentielle totale d'ordre 1 de cette équation pour calculer la pente de la courbe de niveau $\overline{y}$ dans le repère (x_2, x_3). Montrer que les deux méthodes donnent le même résultat.

5. Utiliser la différentielle totale d'ordre 1 pour trouver la pente des courbes d'indifférence dans le repère (x_1, x_2) pour chacune des fonctions d'utilité suivantes:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$\widehat{u}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$$

et

$$\widetilde{u}(x_1, x_2) = B x_1^K x_2^K$$

où $B, K > 0$ sont des constantes. Que constatez-vous? Commenter.

6. On peut remarquer que les trois fonctions d'utilité ci-dessus génèrent des courbes d'indifférence qui ont toutes la même pente. Ceci s'explique par le fait que $\widehat{u} = F(u) = u^2$ et $\widetilde{u} = G(u) = Bu^K$. Noter que les fonction F et G sont strictement croissantes pour $u > 0$. En effet, $F'(u) = 2u > 0$ et $G'(u) = BKu^{K-1} > 0$, pour $u > 0$. On dit que F et G sont des transformations monotones croissantes de u. Dans ce cas, si un consommateur avec des préférences représentées par une fonction d'utilité u préfère le panier de bien A au panier de bien B, avec $u\left(x_1^A, x_2^A\right) > u\left(x_1^B, x_2^B\right)$, alors un consommateur avec des préférences représentées par une fonction d'utilité $\widehat{u}$ ou $\widetilde{u}$ préférera également le panier de bien A au panier de bien B, car $u\left(x_1^A, x_2^A\right) > u\left(x_1^B, x_2^B\right) \Rightarrow \widehat{u}\left(x_1^A, x_2^A\right) > \widehat{u}\left(x_1^B, x_2^B\right)$ et $u\left(x_1^A, x_2^A\right) > u\left(x_1^B, x_2^B\right) \Rightarrow \widetilde{u}\left(x_1^A, x_2^A\right) > \widetilde{u}\left(x_1^B, x_2^B\right)$, du fait que les fonctions $\widehat{u}$ et $\widetilde{u}$ sont des transformations monotones croissantes de u. On dit que l'ordre de préférence entre A et B est préservé par les transformations de ce type. Par dérivation en chaîne, montrer que si $v(x_1, x_2)$ est une transformation monotone croissante de $u(x_1, x_2)$, alors le $\text{TMST}_{2,1}^v$ de v est égal au $\text{TMST}_{2,1}^u$ de u.

7. Soit une fonction de production CES à deux facteurs:

$$y = f(x_1, x_2) = \left[0,3x_1^{-3} + 0,7x_2^{-3}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

Calculer la pente de la courbe de niveau $\overline{y}$ dans le repère (x_1, x_2).

8. Soit une fonction de production CES à deux facteurs:

$$y = A\left[\delta x_1^{-r} + [1-\delta]\, x_2^{-r}\right]^{-\frac{1}{r}}$$

où $A > 0$, $0 < \delta < 1$ et $r > -1$. Calculer la pente de la courbe de niveau $\overline{y}$ dans le repère (x_1, x_2).

Séance de TD N°4. Propriétés de courbure (concavité et convexité)

1. Soit une fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire le gradient et la matrice Hessienne. Calculer la différentielle totale d'ordre 1. Calculer la différentielle totale d'ordre 2. Calculer les déterminants des sous matrices principales successives (ou diagonales) de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1|$ et $|H_2|$). Calculer les déterminants des sous matrices principales de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1^*|$ et $|H_2^*|$).

2. Soit une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$:
$$f(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^2$$
Calculer la différentielle totale d'ordre 2. En utilisant le **Théorème 6**, conclure que la fonction est convexe. Pourquoi le **Théorème 4** pour la stricte convexité ne s'applique pas? Donner un exemple de variations $dx_1 \neq 0$ et $dx_2 \neq 0$ telles que $d^2y = 0$. De manière alternative, calculer les déterminants des sous matrices principales de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1^*|$ et $|H_2^*|$) et utiliser le **Théorème 9.3** pour conclure que la fonction est convexe. Calculer les déterminants des sous matrices principales successives (ou diagonales) de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1|$ et $|H_2|$). Pourquoi le **Théorème 9.1** pour la stricte convexité ne s'applique pas?

3. Soit une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$:
$$f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$$
Calculer la différentielle totale d'ordre 2. En utilisant le **Théorème 5**, conclure que la fonction est strictement concave. De manière alternative, calculer les déterminants des sous matrices principales successives (ou diagonales) de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1|$ et $|H_2|$) et utiliser le **Théorème 9.2** pour conclure que la fonction est strictement concave. En remarquant que la fonction est additivement séparable, utiliser le **Théorème 10.2** pour conclure que la fonction est strictement concave.

4. Soit une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$:
$$f(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]^{\frac{1}{2}}$$
Calculer la différentielle totale d'ordre 2. En utilisant le **Théorème 7**, conclure que la fonction est concave. Pourquoi le **Théorème 5** pour la stricte concavité ne s'applique pas? Donner un exemple de variations $dx_1 \neq 0$ et $dx_2 \neq 0$ telles que $d^2y = 0$. De manière alternative, calculer les déterminants des sous matrices principales de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1^*|$ et $|H_2^*|$) et utiliser le **Théorème 9.4** pour conclure que la fonction est concave. Calculer les déterminants des sous matrices principales successives (ou diagonales) de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1|$ et $|H_2|$). Pourquoi le **Théorème 9.2** pour la stricte concavité ne s'applique pas?

5. Soit une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}}$$

Calculer la différentielle totale d'ordre 2. Noter qu'il est relativement difficile d'étudier son signe et donc d'appliquer le **Théorème 5** (concavité stricte) ou le **Théorème 7** (concavité). De manière alternative, calculer les déterminants des sous matrices principales successives (ou diagonales) de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1|$ et $|H_2|$) et utiliser le **Théorème 9.2** pour conclure que la fonction est strictement concave. Commenter le lien entre cette propriété et la valeur des exposants de cette fonction Cobb-Douglas.

6. Soit une fonction à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

Calculer les déterminants des sous matrices principales de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1^*|$ et $|H_2^*|$) et utiliser le **Théorème 9.4** pour conclure que la fonction est concave. Calculer les déterminants des sous matrices principales successives (ou diagonales) de la matrice Hessienne (i.e. $|H_1|$ et $|H_2|$). Pourquoi le **Théorème 9.2** pour la stricte concavité ne s'applique pas? Commenter le lien entre cette propriété et la valeur des exposants de cette fonction Cobb-Douglas.

Séance de TD N°5. D'autres propriétés des fonctions et applications économiques

1. Soit une fonction à deux variables $y = f(x_1, x_2)$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice Hessienne bordée notée $\overline{H}_2$. Calculer le déterminant de la matrice Hessienne bordée (i.e. $\left|\overline{H}_2\right|$) en utilisant la méthode des co-facteurs.

2. En utilisant le **Théorème 12.1**, montrer que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2_{++}$, sont quasi-concaves:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$$

$$g(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

et

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$$

En utilisant les **Théorèmes 9.2** et **9.4**, déterminer lesquelles sont également concaves ou strictement concaves.

3. En utilisant le **Théorème 12.2**, montrer que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2_{++}$, sont quasi-convexes:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

et

$$g(x_1, x_2) = 3x_1^4 + 5x_2^2$$

En utilisant les **Théorèmes 10.1** et **10.3**, déterminer lesquelles sont également convexes ou strictement convexes?

4. Pourquoi peut-on déterminer aisément que la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{4}}$$

est quasi-concave sur $\mathbb{R}^3_{++}$? Pourquoi peut-on déterminer aisément qu'elle est strictement concave sur $\mathbb{R}^3_{++}$? Pourquoi peut-on déterminer aisément que la fonction

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{4}}$$

est quasi-concave mais pas strictement concave sur $\mathbb{R}^3_{++}$?

5. Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

Montrer qu'elle est homogène de degré $\frac{7}{6}$.

6. Soit une fonction de production Cobb-Douglas à deux facteurs définie sur $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

où $A > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sont des constantes. Montrer que cette fonction est homogène. Quel est son degré d'homogénéité? Montrer que le théorème d'Euler s'applique, i.e.,

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 = kf(x_1, x_2)$$

où k est le degré d'homogénéité de f.