

Mathématiques pour économistes 2

L1 économie

Mickael Beaud

Maître de conférences des universités (MCU)

Faculté d'économie de l'université de Montpellier (UM)

Centre d'Economie de l'Environnement de Montpellier (CEE-M)

(Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr)

January 6, 2025

Thème 3: Optimisation contrainte

3.1 Problèmes contraints

3.2 Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

3.3 Existence, unicité et caractérisation des solutions

- Si, lorsque l'on **maximise** ou **minimise** une fonction, nous sommes libres de considérer n'importe quelle valeur réelle prise par les variables comme solution possible, on a un **problème d'optimisation non-contraint**.
- Cependant, dans la plupart des problèmes économiques, il existe une ou plusieurs **contraintes** qui restreignent l'ensemble des valeurs pouvant être solution.
- Comme nous l'avons déjà constaté **Section 2.3**, les **restrictions directes sur les variables** apparaissent naturellement dans les problèmes économiques et ont généralement un **impact important sur la solution**.

- Dans ce **Thème 3**, nous allons étudier un autre type de restriction où les variables doivent vérifier une ou plusieurs **contraintes prenant la forme d'équations**.
- Nous verrons notamment la **méthode des multiplicateurs de Lagrange** qui est essentielle pour résoudre de nombreux problèmes économiques.

3.1 Problèmes contraints

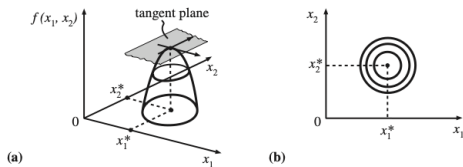
3.2 Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

3.3 Existence, unicité et caractérisation des solutions

- Supposons que l'on cherche à maximiser une fonction **strictement concave** $f(x_1, x_2)$ similaire à celle représentée **Figure 2 Section 2.1** reproduite ci-dessous.
- En l'absence de contrainte, le **Théorème 4** de la **Section 2.2** nous apprend que si $f_i(x_1^*, x_2^*)$ pour $i = 1, 2$, alors la fonction f atteint un **unique maximum global** au point (x_1^*, x_2^*) .

Problèmes contraints

Figure 2 Section 2.1

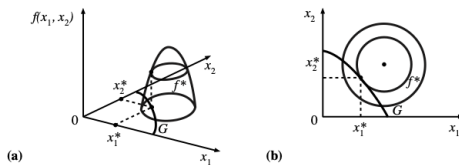


- Supposons maintenant que les variables doivent satisfaire la **contrainte** $g(x_1, x_2) = 0$.
- Cela signifie que les **solutions du programme de maximisation de f** doivent être recherchées parmi les points qui vérifient cette équation.
- On a donc une **condition nécessaire** $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ associée au programme de **programme de maximisation de f** .

- La **Figure 1** illustre ce **problème de maximisation sous contrainte**.
- La courbe G représente les points (x_1, x_2) qui satisfont la **contrainte** $g(x_1, x_2) = 0$.
- Il s'agit donc de trouver un point sur G où la valeur de la fonction f est la plus élevée.
- On voit que la solution (x_1^*, x_2^*) est obtenue au **point de tangence** entre G et la **courbe de niveau** de f la plus élevée.

Problèmes contraints

Figure 1



- Adoptons maintenant une approche analytique.
- Dans la **Section 1.3**, nous avons montré que la **pente d'une courbe de niveau de la fonction f** dans le repère (x_1, x_2) est donnée par

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

- De plus, la **pente de la fonction g** est donnée par

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g_1(x_1, x_2)}{g_2(x_1, x_2)}$$

- Comme le point solution (x_1^*, x_2^*) correspond à un **point de tangence** entre une **courbe de niveau de f** et la **courbe G** , on a

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}$$

- Nous disposons ainsi d'une équation à deux inconnues que l'on ne peut pas résoudre. Mais comme le point (x_1^*, x_2^*) appartient à G (i.e. il vérifie la **contrainte**) on a également

$$g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

- On dispose alors d'un **système de deux équations à deux inconnues** que l'on peut résoudre.

Theorem (1)

Si le point de tangence (x_1^, x_2^*) est solution du **programme de maximisation contrainte***

$$\max_{x_1, x_2} : f(x_1, x_2) \quad \text{s.c. } g(x_1, x_2) = 0$$

alors il satisfait

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)} \quad \text{et} \quad g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

- Nous pouvons démontrer le **Théorème 1** sans nécessairement faire explicitement référence à la représentation graphique.
- Comme précédemment, considérons la **contrainte** $g(x_1, x_2) = 0$, et supposons que l'on peut résoudre cette équation et obtenir x_2 en fonction de x_1 :

$$x_2 = \gamma(x_1)$$

- C'est l'équation de la courbe G dans le repère (x_1, x_2) , comme sur la **Figure 1**.
- D'après le **Théorème 11 Section 1.3 (théorème des fonctions implicites)**, si $g_2 \neq 0$, on a

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \gamma'(x_1) = -\frac{g_1(x_1, \gamma(x_1))}{g_2(x_1, \gamma(x_1))}$$

- De plus, en substituant $x_2 = \gamma(x_1)$ dans la **fonction objectif** du **problème d'optimisation contraint**, on obtient un programme (équivalent) **sans contrainte explicite**

$$\max_{x_1} : f(x_1, \gamma(x_1)) = \phi(x_1)$$

- La solution vérifie nécessairement la **condition du premier ordre**

$$\phi' = f_1(x_1^*, \gamma(x_1^*)) + f_2(x_1^*, \gamma(x_1^*)) \gamma'(x_1^*) = 0$$

- En réarrangeant les termes, et en substituant $\gamma'(x_1^*) = -\frac{g_1(x_1^*, \gamma(x_1^*))}{g_2(x_1^*, \gamma(x_1^*))}$, ainsi que $x_2^* = \gamma(x_1^*)$ (la **contrainte** devant être vérifiée), on retrouve la **condition de tangence** du **Théorème 1**.

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}$$

- Nous présentons maintenant la technique des **multiplicateurs de Lagrange** permettant de résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes.
- Nous allons montrer qu'elle est équivalente à l'approche graphique et au **Théorème 1** présentés ci-dessus.
- On commence par introduire une nouvelle variable, généralement notée λ , appelée **multiplicateur de Lagrange**.
- On forme alors ce que l'on appelle la **fonction de Lagrange** ou le **Lagrangien**

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

- On cherche alors un **point stationnaire** de L par rapport à ses variables x_1 , x_2 et λ .
- D'après la **Définition 1 Section 2.1**, on a les **conditions du premier ordre** suivantes

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

- On dispose d'un **système de trois équations à trois inconnues** que l'on peut résoudre.

- On peut réécrire les deux premières conditions comme suit:

$$\begin{aligned}f_1(x_1^*, x_2^*) &= -\lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) \\f_2(x_1^*, x_2^*) &= -\lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*)\end{aligned}$$

- En les combinant pour éliminer le **multiplicateur de Lagrange**, on retrouve la **condition de tangence** du **Théorème 1**

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}$$

- La seconde condition du **Théorème 1** est simplement donnée par

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

- La **Définition 1** résume ces éléments.

Definition (1)

La **méthode de Lagrange** permettant de trouver la solution (x_1^*, x_2^*) au **problème de maximisation sous contrainte**

$$\max_{x_1, x_2} : f(x_1, x_2) \quad \text{s.c. } g(x_1, x_2) = 0$$

consiste à établir les **conditions du premier ordre** caractérisant un **point stationnaire** de la **fonction de Lagrange**.

Definition (1 suite)

La **fonction de Lagrange** est

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

- On peut alors s'interroger sur les conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'il existe toujours une solution à ce **problème de maximisation sous contrainte**.
- Autrement dit, on peut s'interroger sur les conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que la **méthode de Lagrange** fonctionne.
- En particulier, quels rôles jouent les hypothèses faites sur la **forme des courbes de niveau de la fonction f** et la **forme de la contrainte** capturée par la fonction g ?
- Nous répondrons à ces questions plus loin **Section 3.3**. Pour l'instant, illustrons comment fonctionne la **méthode de Lagrange** à travers quelques exemples.

Exemple (1)

Réolvons le **problème de maximisation contrainte**

$$\max_{x_1, x_2} : x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} \quad s.c. \quad 100 - 2x_1 - 4x_2 = 0$$

Problèmes contraints

Exemple 1

- La **fonction de Lagrange** est

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} + \lambda [100 - 2x_1 - 4x_2]$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{3}{4} x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{-\frac{1}{4}} - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2x_1 - 4x_2 = 0$$

Problèmes contraints

Exemple 1

- On peut réécrire les deux premières **conditions du premier ordre** comme suit:

$$\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{4}}x_2^{\frac{3}{4}} = 2\lambda \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{-\frac{1}{4}} = 4\lambda$$

- En les combinant, pour éliminer le **multiplicateur de Lagrange** λ , on obtient

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

- Finalement, en substituant cette dernière relation dans la troisième **condition du premier ordre** (i.e. la **contrainte**), on obtient les solutions

$$x_1^* = \frac{25}{2}, \quad x_2^* = \frac{75}{4} \quad \text{et} \quad \lambda^* = \frac{1}{8} \left[\frac{3}{2} \right]^{\frac{3}{4}} \approx 1,17$$

Problèmes contraints

Problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e)

- Un(e) étudiant(e) souhaite **allouer son temps hebdomadaire disponible** de 60 heures entre deux sujets d'étude, le sujet 1 et le sujet 2.
- Consacrer t_i heures au sujet $i = 1, 2$ permet d'obtenir un résultat $g_i(t_i)$. On suppose que l'étudiant(e) cherche à **maximiser son résultat moyen**:

$$\max_{t_1, t_2} : \bar{R}(t_1, t_2) = \frac{g_1(t_1) + g_2(t_2)}{2} \quad \text{s.c. } 60 - t_1 - t_2 = 0$$

où

$$g_1(t_1) = 20t_1^{\frac{1}{2}} + 20 \quad \text{et} \quad g_2(t_2) = 3t_2 - 80$$

Problèmes contraints

Problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e)

- La **fonction de Lagrange** est

$$L(t_1, t_2, \lambda) = \frac{20t_1^{\frac{1}{2}} + 20 + 3t_2 - 80}{2} + \lambda [60 - t_1 - t_2]$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = \frac{10t_1^{-\frac{1}{2}}}{2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_2} = \frac{3}{2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - t_1 - t_2 = 0$$

Problèmes contraints

Problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e)

- On peut réécrire les deux premières **conditions du premier ordre** comme suit:

$$5t_1^{-\frac{1}{2}} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} = \lambda$$

- En les combinant, pour éliminer le **multiplicateur de Lagrange** λ , on obtient

$$5t_1^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

- Finalement, en substituant cette dernière relation dans la troisième **condition du premier ordre** (i.e. la **contrainte**), on obtient les solutions

$$t_1^* = \frac{100}{9} \approx 11,11, \quad t_2^* = \frac{440}{9} \approx 48,89, \quad \text{et} \quad \lambda^* = \frac{3}{2}$$

Problèmes contraints

Problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e)

- Les conditions d'optimalité obtenues grâce à la **méthode de Lagrange** permettent une interprétation intéressante des résultats.
- En particulier, à l'optimum, le **multiplicateur de Lagrange**, λ^* , mesure l'**impact marginal du temps alloué à chaque sujet d'étude sur le résultat moyen**.
 - Une augmentation marginale de t_1 augmente le résultat moyen de $\frac{3}{2}$ (car $\bar{R}_1^* = \frac{1}{2}g_1'(t_1^*) = \frac{1}{2}10[t_1^*]^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$).
 - Une augmentation marginale de t_2 augmente le résultat moyen de $\frac{3}{2}$ (car $\bar{R}_2^* = \frac{1}{2}g_2'(t_2^*) = \frac{3}{2}$).
 - A l'optimum, on a $\bar{R}_1^* = \bar{R}_2^* = \lambda^* = \frac{3}{2}$.

Problèmes contraints

Problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e)

- On peut également remarquer que, à l'optimum, bien que le temps passé à étudier le sujet 2 soit plus important, le résultat pour le sujet 2 est plus faible.

$$g_1(t_1^*) = \frac{260}{3} \approx 86,67 \quad \text{et} \quad g_2(t_2^*) = \frac{200}{3} \approx 66,67$$

- Aussi, contrairement aux **contributions marginales**, les **contributions moyennes** ne sont pas égales:

$$\frac{g_1(t_1^*)}{t_1^*} = 7,8 \quad \text{et} \quad \frac{g_2(t_2^*)}{t_2^*} = \frac{15}{11} \approx 1,36$$

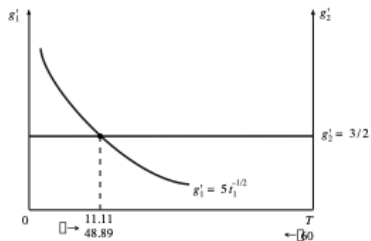
Problèmes contraints

Problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e)

- La **Figure 2** illustre le fait que, à l'optimum, l'impact marginal de t_1 sur le résultat moyen de l'étudiant(e) est égal à celui de t_2 (i.e. $\bar{R}_1^* = \bar{R}_2^*$).
- En effet, si l'impact marginal de t_1 est supérieur à l'impact marginal de t_2 (i.e. $\bar{R}_1 > \bar{R}_2$) il faut augmenter t_1 et réduire t_2 .
- Par contre, si l'impact marginal de t_1 est inférieur à l'impact marginal de t_2 (i.e. $\bar{R}_1 < \bar{R}_2$), il faut réduire t_1 et augmenter t_2 .
- Noter une coquille sur la **Figure 2**, il faut lire $\bar{R}_1 = \frac{1}{2}g'_1$ et $\bar{R}_2 = \frac{1}{2}g'_2$ au lieu de g'_1 et g'_2 .

Problèmes contraints

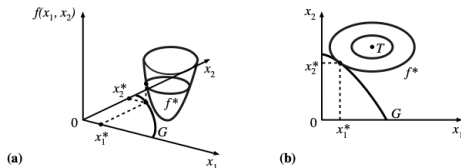
Figure 2



- Jusqu'ici nous n'avons considéré que des **problèmes de maximisation**.
- Mais l'analyse est similaire pour des **problèmes de minimisation**.
- La **Figure 3** illustre la **minimisation** d'une fonction $f(x_1, x_2)$ **strictement convexe** sous la même **contrainte** que précédemment ($g(x_1, x_2) = 0$).
- Il s'agit de trouver un point sur G (i.e. vérifiant la **contrainte**) qui **minimise** la valeur de la fonction f .

Problèmes contraints

Figure 3



- Comme dans le cas d'une **maximisation contrainte**, le point solution (x_1^*, x_2^*) du **problème de minimisation contrainte** correspond à un **point de tangence** entre une **courbe de niveau de f** et la **courbe G** , et donc

$$\frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}$$

- De plus, le point (x_1^*, x_2^*) appartient à G (i.e. il vérifie la **contrainte**):

$$g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

- On obtient donc les mêmes **conditions du premier ordre** nécessaires à la **maximisation** ou à la **minimisation contrainte**.
- Comme nous l'avons vu dans le **Thème 2**, pour déterminer si un **point stationnaire** est un **maximum** ou un **minimum**, nous devons étudier les **conditions du second ordre**.
- Ce point est traité plus loin dans la **Section 3.2**.

Definition (2)

La **méthode de Lagrange** permettant de trouver la solution (x_1^*, x_2^*) au **problème de minimisation contrainte**

$$\min_{x_1, x_2} : f(x_1, x_2) \quad \text{s.c. } g(x_1, x_2) = 0$$

consiste à établir les **conditions du premier ordre** caractérisant un **point stationnaire** de la **fonction de Lagrange**.

Definition (2 suite)

La **fonction de Lagrange** est

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Exemple (2)

Réolvons le **problème de minimisation contrainte**

$$\min_{x_1, x_2} : x_1 + x_2 \quad \text{s.c.} \quad 1 - x_1^{\frac{1}{2}} - x_2$$

Problèmes contraints

Exemple 2

- La **fonction de Lagrange** est

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda \left[1 - x_1^{\frac{1}{2}} - x_2 \right]$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 - \lambda \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1^{\frac{1}{2}} - x_2 = 0$$

Problèmes contraints

Exemple 2

- On peut réécrire les deux premières **conditions du premier ordre** comme suit:

$$1 = \lambda \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad 1 = \lambda$$

- En les combinant, pour éliminer le **multiplicateur de Lagrange** λ , on obtient

$$\frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} = 1$$

- Finalement, en substituant dans la troisième **condition du premier ordre** (i.e. la **contrainte**), on obtient les solutions

$$x_1^* = \frac{1}{4}, \quad x_2^* = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \lambda^* = 1$$

- Le **multiplicateur de Lagrange** peut apparaître comme un simple artifice introduit afin de nous aider à générer les conditions dont nous savons qu'elles sont vérifiées à l'optimum (**point de tangence** et **contrainte** vérifiée).
- En fait, le **multiplicateur de Lagrange** possède une **interprétation économique** très importante et intéressante dans tous les **problèmes d'optimisation contraints**.
- Compte tenu de son importance, nous résumons ce fait dans le **Théorème 2**.

Theorem (2)

Au point solution d'un programme d'optimisation contraint, la valeur du multiplicateur de Lagrange λ^ mesure l'impact d'un desserrement marginal de la contrainte sur la valeur optimale de la fonction objectif.*

Thème 3: Optimisation sous contraintes

3.1 Problèmes contraints

3.2 **Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte**

3.3 Existence, unicité et caractérisation des solutions

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Dans la **Section 3.1**, nous avons observé que les **conditions du premier ordre** associées à un **problème de maximisation contraint** sont **identiques** à celles associées à un **problème de minimisation contraint**. Nous avons également observé ce fait pour les **problèmes non contraints** dans le **Thème 2**).
- Autrement dit, les **conditions du premier ordre** sont **nécessaires** mais elles ne sont **pas suffisantes** pour affirmer qu'un point est solution.
- On doit alors étudier les **conditions du second ordre**.

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Une première approche **globale** consiste à s'assurer, en amont, au travers d'**hypothèses associées au modèle économique** que l'on développe, que ce dernier possède les bonnes propriétés.
- Il s'agit par exemple de faire des hypothèses sur les **préférences des individus** ou sur les **technologies de production des entreprises**, qui garantissent que les **fonctions objectif** des agents économiques (e.g. fonctions d'utilité et fonctions de profit), ainsi que les **contraintes** considérées, ont les bonnes propriétés (i.e. les propriétés qui permettent un traitement mathématique simple ou du moins **sans difficultés d'existence ou d'unicité de l'équilibre du modèle**).

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Nous verrons **Section 3.3**, qu'il est **suffisant** pour l'obtention d'un **maximum** (resp. **minimum**) **contraint** que la **fonction objectif** soit **quasiconcave** (resp. **quasiconvexe**) et que les **contraintes** définissent des ensembles **convexes**.
- Toutefois, notamment lorsque l'on effectue des analyses de **statique comparative**, il est utile de disposer des **conditions du second ordre locales** (aux alentours du point solution, pour de "petites" variations à partir de l'optimum).

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Nous avons observé précédemment (**Section 2.2**) que, d'un point de vue **local**, les **conditions du second ordre** s'expriment en terme de contraintes sur les **signes des déterminants des sous matrices principales successives** de la **matrice Hessienne** associée à la fonction que l'on cherche à optimiser.
- Pour les **problèmes d'optimisation contraints**, il existe des conditions similaires, bien que légèrement plus complexes.
- Nous n'allons pas discuter le fondement de ces conditions de manière approfondie (ce qui peut s'avérer très complexe), mais simplement les établir et les expliquer. Le but est de pouvoir les utiliser dans le **Thème 4** relatif à la **statique comparative**.

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Considérons le **problème de maximisation contrainte** le plus simple avec deux variables et une contrainte:

$$\max_{x_1, x_2} : f(x_1, x_2) \quad \text{s.c. } g(x_1, x_2) = 0$$

- Le **Lagrangien** associé est

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Supposons que le point $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ est un **point stationnaire** vérifiant les **conditions du premier ordre**

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

- La **matrice Hessienne** associée au **Lagrangien**, à l'**optimum** (d'où la notation H^*), est

$$H^* = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} + \lambda^* g_{11} & f_{12} + \lambda^* g_{12} & g_1 \\ f_{21} + \lambda^* g_{21} & f_{22} + \lambda^* g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Remarquons que lorsque la **contrainte** est **linéaire**, on a $g_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2$) et H^* se simplifie:

$$H^* = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Il s'agit alors de la **matrice Hessienne** de f **bordée** (en bas et à droite) par le vecteur $[g_1, g_2, 0]$.

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- On peut calculer le **déterminant** en utilisant la méthode des **cofacteurs**

$$\begin{aligned} |H^*| &= f_{11} |H_{11}| - f_{12} |H_{12}| + g_1 |H_{13}| \\ &= f_{11} \begin{vmatrix} f_{22} & g_2 \\ g_2 & 0 \end{vmatrix} - f_{12} \begin{vmatrix} f_{21} & g_2 \\ g_1 & 0 \end{vmatrix} + g_1 \begin{vmatrix} f_{21} & f_{22} \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} \\ &= -f_{11}g_2^2 + f_{12}g_1g_2 + g_1[f_{21}g_2 - g_1f_{22}] \\ &= -f_{11}g_2^2 + 2f_{12}g_1g_2 - f_{22}g_1^2 \end{aligned}$$

Theorem (3)

Si $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ est un **point stationnaire** de la **fonction de Lagrange**
 $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$, alors il constitue

1. un **maximum** si $|H^*| > 0$.
2. un **minimum** si $|H^*| < 0$.

Exemple (3)

Montrons que la solution de l'**Exemple 1** constitue un maximum:

$$\max_{x_1, x_2} : x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} \quad \text{s.c. } 100 - 2x_1 - 4x_2 = 0$$

- La **matrice Hessienne** associée au **Lagrangien**

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}} + \lambda [100 - 2x_1 - 4x_2]$$

est

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16}x_1^{-\frac{7}{4}}x_2^{\frac{3}{4}} & \frac{3}{16}x_1^{-\frac{3}{4}}x_2^{-\frac{1}{4}} & -2 \\ \frac{3}{16}x_1^{-\frac{3}{4}}x_2^{-\frac{1}{4}} & -\frac{3}{16}x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{-\frac{5}{4}} & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Au **point stationnaire** on a $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{25}{2}, \frac{75}{4}) = (12.5, 18.75)$ et donc

$$H^* = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{7}{4}} [18.75]^{\frac{3}{4}} & \frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} & -2 \\ \frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} & -\frac{3}{16} [12.5]^{\frac{1}{4}} [18.75]^{-\frac{5}{4}} & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- On peut calculer le **déterminant** en utilisant la méthode des **cofacteurs**

$$\begin{aligned} |H^*| &= -\frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{7}{4}} [18.75]^{\frac{3}{4}} \times \begin{vmatrix} -\frac{3}{16} [12.5]^{\frac{1}{4}} [18.75]^{-\frac{5}{4}} & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad -\frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} \times \begin{vmatrix} \frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad -2 \times \begin{vmatrix} \frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} & -\frac{3}{16} [12.5]^{\frac{1}{4}} [18.75]^{-\frac{5}{4}} \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

$$\begin{aligned} |H^*| &= -\frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{7}{4}} [18.75]^{\frac{3}{4}} \times [-16] \\ &\quad -\frac{3}{16} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} \times [-8] \\ &\quad -2 \times \left[-\frac{12}{16} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} - \frac{6}{16} [12.5]^{\frac{1}{4}} [18.75]^{-\frac{5}{4}} \right] \end{aligned}$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

$$\begin{aligned} |H^*| &= 3 [12.5]^{-\frac{7}{4}} [18.75]^{\frac{3}{4}} \\ &\quad + \frac{3}{2} [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} \\ &\quad + \frac{3}{4} \left[2 [12.5]^{-\frac{3}{4}} [18.75]^{-\frac{1}{4}} + [12.5]^{\frac{1}{4}} [18.75]^{-\frac{5}{4}} \right] \\ &\approx 0.58 > 0 \end{aligned}$$

- D'après le **Théorème 3**, nous avons bien identifié un **maximum** à partir des **conditions du premier ordre**.

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

Problème du consommateur

Avec deux biens, le **problème du consommateur** s'écrit

$$\max_{x_1, x_2} : u(x_1, x_2) \quad s.c. \quad R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

- Le **Lagrangien** associé est

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda [R - p_1 x_1 - p_2 x_2]$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

Problème du consommateur

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u_1(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = u_2(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- En combinant les deux premières **conditions du premier ordre** on obtient la **condition de tangence**:

$$\frac{u_1(x_1^*, x_2^*)}{u_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow TMS_{21}^* = \frac{p_1}{p_2}$$

- La troisième **condition du premier ordre** impose simplement que la **contrainte budgétaire** est vérifiée:

$$R - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- A l'optimum, la **matrice Hessienne** associée au **Lagrangien** est

$$H^* = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Le **déterminant** de H^* est (en utilisant la méthode des **cofacteurs**)

$$\begin{aligned} |H^*| &= u_{11} \begin{vmatrix} u_{22} & -p_2 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} - u_{12} \begin{vmatrix} u_{21} & -p_2 \\ -p_1 & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} u_{21} & u_{22} \\ -p_1 & -p_2 \end{vmatrix} \\ &= -p_2^2 u_{11} + p_1 p_2 u_{12} - p_1 [-p_2 u_{21} + p_1 u_{22}] \\ &= -p_2^2 u_{11} + 2p_1 p_2 u_{12} - p_1^2 u_{22} > 0 \end{aligned}$$

- Il est clair que si $u_{11} < 0$, $u_{22} < 0$ et $u_{12} > 0$, alors $|H^*| > 0$.

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- D'après les **conditions du premier ordre**, on a

$$p_1 = -\frac{u_1}{\lambda} \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{u_2}{\lambda}$$

- En substituant ces prix dans $|H^*|$ on obtient:

$$|H^*| = -\frac{u_{11}u_2^2 - 2u_1u_2u_{12} + u_{22}u_1^2}{\lambda^2}$$

- Ainsi, on retrouve la condition de **stricte quasiconcavité** (voir **Section 1.5**)

$$|H^*| > 0 \Leftrightarrow u_{11}u_2^2 - 2u_1u_2u_{12} + u_{22}u_1^2 < 0$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Jusqu'ici, nous avons uniquement étudié des **problèmes d'optimisation** avec **deux variables** et **une contrainte**.
- Nous étendons maintenant le **Théorème 3** pour les problèmes à $n \geq 2$ variables.
- Comme le **Théorème 3**, le **Théorème 4** donne des **conditions suffisantes** mais **non-nécessaires**. Un point peut être solution d'un **problème d'optimisation contraint** sans pour autant vérifier les conditions de ces théorèmes.

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Toutefois, dans les **modèles économiques**, on fait généralement l'**hypothèse** que les **conditions suffisantes** des **Théorèmes 3 et 4** sont **satisfaites** pour qu'un **point stationnaire** soit solution du **problème d'optimisation contraint** étudié.
- Il est donc peu utile (dans un cours de mathématiques pour économistes) d'investiguer les **conditions nécessaires et suffisantes**.

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Considérons le problème de **maximisation contrainte** avec n variables et une contrainte:

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{s.c. } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

- Le **Lagrangien** associé est

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- La **matrice Hessienne** associée au **Lagrangien**, à l'**optimum** (d'où la notation H^*), est

$$H^* = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n & 0 \end{bmatrix}$$

Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

- Remarquons ici encore que lorsque la **contrainte** est **linéaire**, on a $g_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), et H^* se simplifie:

$$H^* = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n & 0 \end{bmatrix}$$

- Il s'agit alors de la **matrice Hessienne** de f **bordée** (en bas et à droite) par le vecteur $[g_1, g_2, \dots, g_n, 0]$.

Theorem (4)

Si $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*)$ est un **point stationnaire** de la fonction de **Lagrange** $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est la solution de

$$1. \max_{x_1, x_2} : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{s.c. } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \text{ si}$$

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & g_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \dots,$$

$$|H^*| \begin{cases} > 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ < 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Theorem (4)

Si $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda^*)$ est un **point stationnaire** de la fonction de **Lagrange** $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, alors $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est la solution de

$$2. \min_{x_1, x_2} : f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{s.c.} \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \text{ si}$$

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & g_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \dots, |H^*| < 0.$$

Thème 3: Optimisation sous contraintes

3.1 Problèmes contraints

3.2 Conditions du second ordre pour l'optimisation sous contraintes

3.3 **Existence, unicité et caractérisation des solutions**

- Dans les **Sections 3.1** et **3.2**, nous avons vu comment trouver les solutions d'un **problème d'optimisation contraint** en utilisant notamment la **méthode de Lagrange** sans réellement nous poser la question de savoir si cette approche est justifié ou non.
- Nous allons maintenant répondre à cette question.

- Considérons un **problème de maximisation contraint** (des arguments symétriques vont s'appliquer pour un **problème de minimisation contraint**).
- Par ailleurs, plutôt que d'exprimer les contraintes sous forme d'équations, supposons, de manière équivalente, que les solutions doivent appartenir à un ensemble X qui est un sous-ensemble de l'ensemble de définition $\mathbb{R}^n$ de la fonction objectif à n variables que l'on cherche à optimiser.
- Nous allons considérer $n = 1$ et $n = 2$ pour illustrer graphiquement.

- La première question fondamentale qui se pose est de savoir si le problème d'optimisation admet ou non (au moins) une solution.
- C'est la question de l'**existence** d'(au moins) une solution.
- Le **Théorème 5** ci-dessous donne les **conditions suffisantes d'existence** d'(au moins) une solution pour tout **problème d'optimisation** (**maximisation** ou **minimisation**) **contraint**.

Theorem (5)

*Si la fonction f , définie sur $\mathbb{R}^n$, est **continue**, et si X est un sous-ensemble **non-vide**, **fermé** et **borné** de $\mathbb{R}^n$, alors f possède à la fois un **minimum** et un **maximum** sur X . C'est le **théorème de Weierstrass**.*

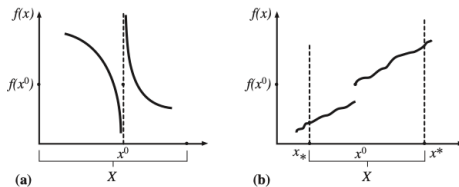
- Noter qu'un sous ensemble **non-vide** de $\mathbb{R}$ est simplement un ensemble qui contient quelque chose.
- Un sous ensemble **fermé** et **borné** de $\mathbb{R}$ est un ensemble dont les bornes sont **contenues dans l'ensemble** (**fermé**) et sont **finies** (**borné**).
- Par exemple, tous les sous-ensembles $X = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec a et b des constantes vérifiant $a < b$, sont **non-vides**, **fermés** et **bornés**. Ils sont alors qualifiés de **compacts**.
- Mais les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants ne le sont pas: $X = [0, +\infty)$ (fermé, non-borné), $X = (0, 1)$ (ouvert, borné), et $X = [0, 1)$ (semi-ouvert, borné).

- Les conditions du **Théorème 5** sont **suffisantes** mais **non-nécessaires**. Autrement dit, il est possible qu'une **solution existe** lorsque la **fonction objectif** est **discontinue**.
- La **Figure 5** illustre le genre de problème qui peut apparaître ou non lorsque la **fonction objectif** est **discontinue**.
- Sur les **Figures 5.a** et **5.b**, la fonction représentée est **discontinue** en x_0 .

- Sur la **Figure 5.a**, la **discontinuité** condamne l'existence d'une solution car la fonction tend vers $-\infty$ lorsque l'on approche x_0 par la gauche, et vers $+\infty$ lorsque l'on approche x_0 par la droite. La fonction n'admet pas de **maximum** ou de **minimum** sur X .
- Sur la **Figure 5.b**, la **discontinuité** ne condamne pas l'existence d'une solution. La fonction admet un **maximum** $x^* \in X$ et un **minimum** $x_* \in X$.

Existence, unicité et caractérisation des solutions

Figure 5



Existence, unicité et caractérisation des solutions

- Dans les **modèles économiques**, on suppose généralement que les fonctions que l'on cherche à optimiser sont **différentiables** (i.e. les dérivées partielles existent, ce qui signifie que la fonction admet une tangente en tout point).
- Or la **différentiabilité** implique la **continuité**. On voit par exemple sur les **Figures 5a** et **5b** que la fonction n'est pas dérivable en x_0 car il est impossible d'établir une tangente à la fonction en ce point (pour calculer sa pente et donc la dérivée).
- De plus, lorsque l'on considère des fonctions non-différentiables, on considère qu'elles sont continues.
- Ainsi, la condition de **continuité** du **Théorème 5** est toujours vérifiée dans les **modèles économiques**. En effet, un modèle sans solution est inutile.

- Le **Théorème 5** s'applique uniquement si l'ensemble X est **non-vide**.
- Il est possible que X soit **vide** lorsqu'une **contrainte** associée au problème d'optimisation est **impossible à vérifier** ou si les **contraintes** sont **incompatibles**.
- Par exemple, les **contraintes** suivantes sont **incompatibles** (elles ne peuvent pas être vérifiées simultanément):

$$3x_1 + 6x_2 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 = 6$$

- Dans le repère (x_1, x_2) , les droites d'équation $x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x_1$, $x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1$ et $x_2 = 6 - x_1$ ne se coupent pas en un point.

- Le **Théorème 5** s'applique uniquement si l'ensemble X est **borné**. Par définition, un ensemble est **borné** s'il est impossible d'approcher l'infini tout en restant dans l'ensemble.
- Pour illustrer quelle genre de difficulté peut apparaître si X est **non-borné**, considérons le **problème du consommateur**.
- Supposons qu'il existe deux biens et que le prix du bien 1 soit nul ($p_1 = 0$). Alors une quantité infinie de bien peut être consommée. L'**ensemble budgétaire** est **non-borné**. Dans le repère (x_1, x_2) , c'est l'ensemble se trouvant sous la droite horizontale $x_2 = \frac{R}{p_2}$.
- Si l'**utilité marginale** du bien 1 est positive, alors le consommateur ne sera **jamais satisfait** avec une quantité finie de bien 1. Le problème du consommateur n'a pas de solution.

- Le **Théorème 5** s'applique uniquement si l'ensemble X est **fermé**. Par définition, un ensemble est **fermé** s'il contient ses bornes.
- Pour illustrer quelle genre de difficulté peut apparaître si X est **non-fermé**, considérons le **problème d'optimisation contraint** suivant:

$$\max_x : y = 2x \quad \text{s.c. } 0 < x < 1$$

- La fonction doit donc prendre ses valeurs dans $(0, 2)$. Elle n'admet pas de **maximum** dans cet intervalle (ni de **minimum**).

- Par opposition, la solution du **problème d'optimisation contraint** suivant existe ($x^* = 1$):

$$\max_x : y = 2x \quad \text{s.c. } 0 \leq x \leq 1$$

- Dans ce cas, $X = [0, 1]$ est **fermé** car les bornes appartiennent à l'ensemble.
- Ainsi, dans les **problèmes d'optimisation contraints**, on exclut donc les **contraintes** en **inégalité stricte**.

- Le fait que X soit **fermé** et **borné** implique que sont **image** (les valeurs prises par la fonction dans cet intervalle) est un ensemble **fermé** et **borné**.
- Or il est évident qu'un ensemble **fermé** et **borné** admet un **maximum** (la borne à droite) et un **minimum** (la borne à gauche).

- Par la suite, nous supposons que les conditions du **Théorème 5** sont vérifiées et qu'une solution existe.
- On peut alors se demander sous quelles conditions la **méthode de Lagrange** permet de l'identifier (i.e. qu'est-ce qui nous assure que cette méthode fonctionne?).
- La **méthode de Lagrange** fonctionne si et seulement s'il existe des **multiplicateurs de Lagrange** permettant de résoudre les **conditions du premier ordre**.
- Autrement dit, il doit être possible de résoudre le système de $n + m$ équations à $n + m$ inconnues (les **conditions de Lagrange**).

- Lorsque les **contraintes** sont **toutes linéaires** et **non-contradictaires**, la **méthode de Lagrange fonctionne toujours**.
- Lorsque les **contraintes** sont **non-linéaires**, il existe des conditions techniques (**conditions de qualification des contraintes**), non présentées ici, qui nous assurent que la **méthode de Lagrange fonctionne**.

Existence, unicité et caractérisation des solutions

- Si les **multiplicateurs** existent, alors il est évident que les **conditions de Lagrange** donnent la solution du problème.
- En effet, pour un **maximum**, on a:

$$f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}$$

car $\mathbf{x}^*$ maximise le **Lagrangien**.

- De plus, $\forall \mathbf{x} \in X$ (les points vérifiant les contraintes), on a $g^j(\mathbf{x}) = 0$.
En conséquence

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X$$

et donc $\mathbf{x}^*$ maximise la fonction f .

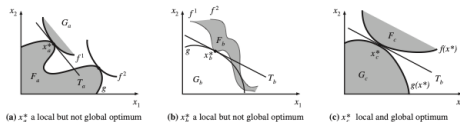
- Une démonstration similaire vaut pour un **minimum**.

- Le point solution identifié par la **méthode de Lagrange** (qui vérifie les **conditions du premier ordre**) est un **optimum** (un **maximum** ou un **minimum**) **local**.
- Si nous identifions un **optimum local**, on sait que la fonction est maximisée ou minimisée en comparaison des points se trouvant aux **alentours proches** de la solution.
- Mais il se peut que ce ne soit pas le **véritable optimum** que l'on recherche qui est l'**optimum global**.
- La **Figure 6** illustre ce point.

- Les **Figures 6.a** et **6.b** illustrent des **maximums locaux**, respectivement x_a^* et x_b^* , qui ne sont pas des **maximums globaux** (noter une coquille sur la **Figure 6.a**, il faut intervertir G_a et F_a).
- Ceci peut être le cas même si les **conditions du second ordre** sont vérifiées.
- En effet, les **conditions du second ordre** permettent seulement d'identifier un **maximum local** ou un **minimum local** et d'exclure un **point d'inflexion** ou un **point selle** (où les **conditions du premier ordre** sont vérifiées).
- Sur la **Figure 6.c**, nous avons le cas recherché où la solution x_c^* est bien un **maximum global**.

Existence, unicité et caractérisation des solutions

Figure 6



- On peut remarquer que sur la **Figure 6.c**, la **droite tangente** T_c **sépare** les deux ensembles F_c et G_c .
- De ce fait, il existe un **unique point** x_c^* qui appartient à la fois à F_c et G_c .
- Par contre, sur la **Figure 6.a** (resp. **6.b**) la **droite tangente** T_a (resp. T_b) ne **sépare pas** les deux ensembles F_a et G_a (resp. F_b et G_b).

- Ceci suggère que l'on peut s'assurer d'obtenir un **maximum global** comme solution d'un **problème d'optimisation contraint** lorsque les ensembles F et G ont une forme correspondant à la **Figure 6.c**.
- En particulier, si F et G sont **convexes**, on obtient le cas décrit **Figure 6.c**.
- F et G sont convexes si et seulement si les **courbes de niveau** de f sont **convexes** et la **frontière** g (de l'ensemble des points vérifiant les contraintes) est **concave**.
- On sait que ces propriétés sont vérifiées si f est **quasiconcave** et si les fonctions contraintes $g^1, g^2, \dots, g^m$ sont **quasiconvexes**.
- Ceci donne l'intuition du **Théorème 6**.

Theorem (6)

Dans le **problème de maximisation contraint**

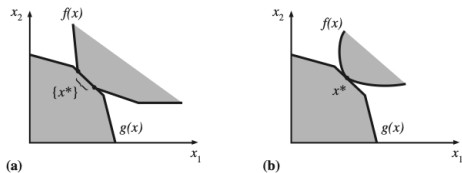
$$\max_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}) \quad \text{s.c. } g^1(\mathbf{x}) = 0, g^2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g^m(\mathbf{x}) = 0$$

si la fonction f est **quasiconcave** et si toutes les fonctions $g^1, g^2, \dots, g^m$ sont **quasiconvexes**, alors toute **solution localement optimale** au **problème de maximisation contraint** est également **globalement optimale**.

- Les conditions du **Théorème 6** n'excluent pas la possibilité d'obtenir **plusieurs solutions**.
- Pour s'assurer qu'un problème d'optimisation contraint admet une **unique solution**, on doit renforcer les conditions du **Théorème 6**.
- Au regard de la **Figure 7**, on comprend aisément qu'il s'agit de supposer la **stricte quasiconcavité** de f et/ou la **stricte quasiconvexité** des fonctions $g^1, g^2, \dots, g^m$.

Existence, unicité et caractérisation des solutions

Figure 7



Theorem (7)

Dans le **problème de maximisation contraint**

$$\max_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}) \quad \text{s.c. } g^1(\mathbf{x}) = 0, g^2(\mathbf{x}) = 0, \dots, g^m(\mathbf{x}) = 0$$

où f et g sont des fonctions croissantes de $\mathbf{x}$, toute solution localement optimale est **unique** et **globalement optimale** si au moins une des deux conditions suivantes est vérifiée:

1. La fonction f est **strictement quasiconcave** et toutes les fonctions $g^1, g^2, \dots, g^m$ sont **quasiconvexes**.
2. La fonction f est **quasiconcave** et toutes les fonctions $g^1, g^2, \dots, g^m$ sont **strictement quasiconvexes**.