

# Mathématiques pour économistes 2

L1 économie

Mickael Beaud

Maître de conférences des universités (MCU)  
Faculté d'économie de l'université de Montpellier (UM)  
Centre d'Économie de l'Environnement de Montpellier (CEE-M)  
(Courriel: [mickael.beaud@umontpellier.fr](mailto:mickael.beaud@umontpellier.fr))

January 6, 2025

# Thème 2: Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- 2.1. Conditions du premier ordre
- 2.2. Conditions du second ordre
- 2.3. Restrictions directes sur les variables

# Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- L'**optimisation** est fondamentale en sciences économiques et les méthodes mathématiques d'**optimisation** sont à la base de la plupart des **modèles économiques**.
- Par exemple, la **théorie de la demande** est basée sur un modèle de décision dans lequel le consommateur choisit le panier de biens qu'il préfère (i.e. celui qui **maximise son utilité**) parmi les paniers de biens accessibles (compte tenu de son budget).
- De même, la **théorie de l'offre** est basée sur un modèle de décision dans lequel l'entreprise choisit la combinaison de facteurs la **moins couteuse** (i.e. celle qui **minimise son coût de production**) parmi les combinaisons de facteurs permettant de réaliser un certain niveau de production. Puis, l'entreprise choisit le niveau de production qui **maximise son profit**.

- L'**optimisation** et la **rationalité** sont pratiquement synonymes en économie.
- Formellement, **optimiser** signifie **maximiser** ou **minimiser** une fonction sur un ensemble donné.
- L'**optimisation** permet de **résoudre** ou de **trouver les solutions** des **modèles économiques**.
- Les **prédictions** des **modèles économiques** découlent des **solutions** des **problèmes d'optimisation** qu'ils contiennent.

# Thème 2: Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- 2.1. **Conditions du premier ordre**
- 2.2. Conditions du second ordre
- 2.3. Restrictions directes sur les variables

- Les **valeurs extrêmes** d'une fonction sont les valeurs **maximales** ou **minimales** de la fonction.
- Les **valeurs stationnaires** d'une fonction correspondent aux points où les **dérivées partielles d'ordre 1** de la fonction sont **toutes nulles**.

## Definition (1)

La **valeur stationnaire** d'une fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$ , apparaît en un **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  où les  $n$  égalités suivantes sont vérifiées simultanément:

$$\begin{aligned}f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \\f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \\&\dots \\f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0\end{aligned}$$

Ce sont les **conditions du premier ordre**.

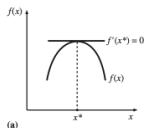
- Pour les **fonctions à une variable**, les **points stationnaires** ne correspondent pas nécessairement aux **valeurs extrêmes** d'une fonction (lorsqu'il s'agit de **points d'inflexion** de la fonction).
- C'est également le cas pour les **fonctions à plusieurs variables**.
- Pour une fonction à  $n$  variables, une **valeur stationnaire** de la fonction peut correspondre à **un point selle**, où la fonction atteint un **maximum** par rapport à certaines variables et un **minimum** par rapport aux autres variables.



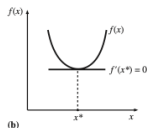
- Pour une **fonction à une variable**  $f(x)$ , si  $f'(x^*) = 0$  pour une certaine valeur de  $x = x^*$ , alors la fonction  $f$  admet soit un **maximum**, soit un **minimum**, soit un **point d'inflexion** en  $x = x^*$ .
  - Si  $f'(x^*) = 0$  et  $f''(x^*) > 0$ , alors  $f$  admet un **minimum local** au point  $x = x^*$ .
  - Si  $f'(x^*) = 0$  et  $f''(x^*) < 0$ , alors  $f$  admet un **maximum local** au point  $x = x^*$ .
  - Noter que  $f''(x^*) = 0$  est **nécessaire** pour que  $f$  admette un **point d'inflexion** au point  $x = x^*$ . Ce cas est donc exclu si  $f''(x^*) > 0$  ou  $f''(x^*) < 0$ .

# Conditions du premier ordre

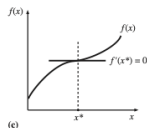
Fonctions à une variable: Maximum, minimum et point d'inflexion



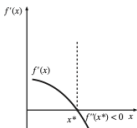
(a)



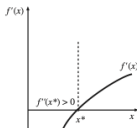
(b)



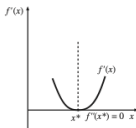
(c)



(d)



(e)



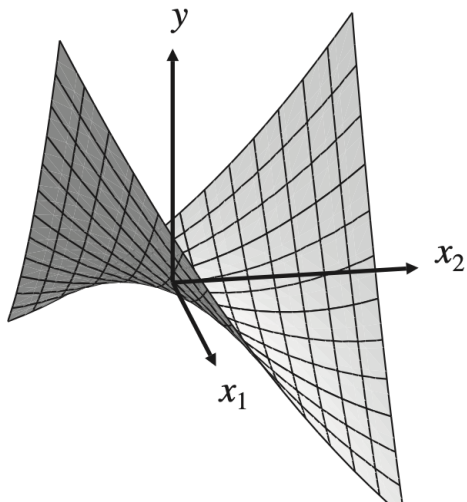
(f)

- Pour une **fonction à une variable**, il n'y a qu'une seule façon de quitter un point  $x^*$ .
- Mais pour une **fonction à plusieurs variables**, il existe une infinité de façons de quitter un point  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .
- Il est donc plus complexe de caractériser les **valeurs extrêmes** d'une **fonction à plusieurs variables**.
- Par exemple, pour une fonction à deux variables  $f(x_1, x_2)$ , les conditions  $f_1(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ ,  $f_{11}(x_1^*, x_2^*) > 0$  et  $f_{22}(x_1^*, x_2^*) > 0$ , ne sont pas **suffisantes** pour garantir un **minimum local** au point  $(x_1, x_2)$ .

- Les complications qui apparaissent dans le cas de fonctions à plusieurs variables sont ici similaires à celles que nous avons évoqué au début de la **Section 1.4** et à travers l'**Exemple 24** et la **Figure 15** pour la fonction  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2$  (avec  $f_1 = 2x_1 - 5x_2$  et  $f_2 = 2x_2 - 5x_1$ ).
- Nous avons en effet remarqué que cette fonction n'est pas **convexe**, alors que  $f_{11} = 2 > 0$  et  $f_{22} = 2 > 0$ .
- Cette fonction admet un **minimum local** au point  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  lorsque l'on fait varier  $x_1$  **seulement** (car  $f_1 = 0$  et  $f_{11} > 0$ ), ou  $x_2$  **seulement** (car  $f_2 = 0$  et  $f_{22} > 0$ ).
- Toutefois, la **Figure 15** montre que la fonction n'admet pas un **minimum local** au point  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  lorsque l'on fait varier  $x_1$  **et**  $x_2$ .

# Conditions du premier ordre

Figure 15

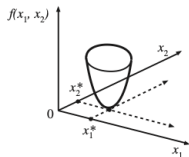


- Comme pour les **fonctions à une variable**, le fait qu'une **fonction de plusieurs variables** admette une **valeur stationnaire** en un point ne garantit pas qu'il s'agisse d'une **valeur extrême** (**minimum** ou **maximum**) de la fonction.
- Les **conditions du premier ordre** sont **nécessaires** mais pas **suffisantes**.
- Nous devons considérer les **conditions du second ordre** et étudier les **dérivées partielles d'ordre 2**.
- En outre, nous devons tenir compte non seulement des **dérivées partielles d'ordre 2 directes** ( $f_{ii}$ ), mais également des **dérivées partielles d'ordre 2 croisées** ( $f_{ij}$ ,  $i \neq j$ ).

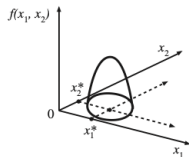
- La **Figure 1** ci dessous illustre quatre cas ou une fonction à deux variables admet une **valeur stationnaire**.
- Seuls les cas (a) et (b) correspondent à des **valeurs extrêmes**. Un **minimum** cas (a). Un **maximum** cas (b).
- Les cas (c) et (d) illustrent un **point selle**. Un **minimum** dans la direction de  $x_1$  et un **maximum** dans la direction de  $x_2$  cas (c). Un **maximum** dans la direction de  $x_1$  et un **minimum** dans la direction de  $x_2$  cas (d)

# Conditions du premier ordre

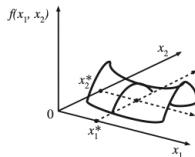
Figure 1. Valeur stationnaire



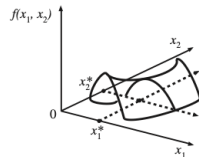
(a) minimum in  $x_1$ -direction, minimum in  $x_2$ -direction



(b) maximum in  $x_1$ -direction, maximum in  $x_2$ -direction



(c) minimum in  $x_1$ -direction, maximum in  $x_2$ -direction



(d) maximum in  $x_1$ -direction, minimum in  $x_2$ -direction



## Theorem (1)

Si une fonction  $f(\mathbf{x})$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$ , admet un **maximum local** au point  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , soit

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$$

pour tous les points  $\mathbf{x}$  aux alentours (éventuellement très proches) du point  $\mathbf{x}^*$ , alors la fonction  $f$  admet une **valeur stationnaire** en  $\mathbf{x}^*$ :

$$f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

...

$$f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

sont vérifiées simultanément. Ces **conditions du premier ordre** sont donc **nécessaires** pour un **maximum local**.

- Pour illustrer le fait que les **conditions du premier ordre** sont **nécessaires (Théorème 1)**, considérons la **différentielle totale** au point  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  où la fonction admet un **maximum local**:

$$dy = df(\mathbf{x}^*) = f_1(\mathbf{x}^*) dx_1 + f_2(\mathbf{x}^*) dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}^*) dx_n$$

- Si  $\mathbf{x}^*$  correspond à un **maximum local**, alors  $dy = 0$ .

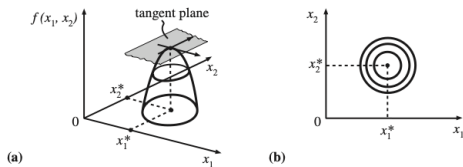
$$dy = df(\mathbf{x}^*) = f_1(\mathbf{x}^*) dx_1 + f_2(\mathbf{x}^*) dx_2 + \dots + f_n(\mathbf{x}^*) dx_n$$

- **Raisonnons par l'absurde** et supposons qu'au moins une des **dérivées partielles d'ordre 1** ne soit pas nulle.
  - Par exemple, si  $f_1(\mathbf{x}^*) > 0$ , choisissons  $dx_1 > 0$  (et  $dx_2 = dx_3 = \dots = dx_n = 0$ ). On obtient  $dy > 0$ , et donc  $\mathbf{x}^*$  n'est pas un **maximum local**.
  - De même, si  $f_1(\mathbf{x}^*) < 0$ , choisissons  $dx_1 < 0$  (et  $dx_2 = dx_3 = \dots = dx_n = 0$ ). On obtient  $dy > 0$ , et donc  $\mathbf{x}^*$  n'est pas un **maximum local**.
  - Si  $\mathbf{x}^*$  correspond à un **maximum local**, on doit donc avoir  $f_1(\mathbf{x}^*) = 0$ , sinon il est toujours possible d'augmenter localement la valeur de la fonction avec  $dx_1 \neq 0$  (et  $dx_2 = dx_3 = \dots = dx_n = 0$ ).

- Les **Figure 2a** et **2b** illustrent un **maximum (global)** pour une fonction à deux variables.
- Sur la **Figure 2a**, on observe que le **plan tangent** est **horizontal** au point où la fonction atteint son **maximum**. Ainsi, on a  $f_1(x_1^*, x_2^*) = 0$  et  $f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ .
- Sur la **Figure 2b**, on a représenté les **courbes de niveau** de la fonction. Le niveau le plus haut correspond au point où la fonction atteint son **maximum**.

# Conditions du premier ordre

Figure 2



- Un raisonnement symétrique s'applique dans le cas d'un **minimum**.
- Nous disposons donc également du **Théorème 2** suivant.

## Theorem (2)

Si une fonction  $f(\mathbf{x})$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$ , admet un **minimum local** au point  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , soit

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$$

pour tous les points  $x$  aux alentours (éventuellement très proches) du point  $\mathbf{x}^*$ , alors la fonction  $f$  admet une **valeur stationnaire** en  $\mathbf{x}^*$ :

$$f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

...

$$f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$$

sont vérifiées simultanément. Ces **conditions du premier ordre** sont donc **nécessaires** pour un **minimum local**.

## Exemple (1)

Cherchons les **valeurs stationnaires** des fonctions à plusieurs variables suivantes

$$(i) \quad f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$$

$$(ii) \quad f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$$

$$(iii) \quad f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1^3$$

$$(iv) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$$

$$(v) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$



# Conditions du premier ordre

## Exemple 1

$$(i) \quad f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2.$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = 2x_2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$4x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad 2x_2^* = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ .
- La fonction  $f$  a une **unique valeur stationnaire** (uniquement) au point  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ .

# Conditions du premier ordre

## Exemple 1

$$(ii) \quad f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2.$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$4 - 2x_1^* + x_2^* = 0 \quad \text{et} \quad 2 - 2x_2^* + x_1^* = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point  $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) \approx (3.33, 2.67)$ .
- La fonction  $f$  possède une **unique valeur stationnaire** au point  $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ .

# Conditions du premier ordre

## Exemple 1

$$(iii) \quad f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1^3$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 8x_1 - x_2 - 3x_1^2 \quad \text{et} \quad f_2 = -x_1 + 2x_2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$8x_1^* - x_2^* - 3[x_1^*]^2 = 0 \quad \text{et} \quad -x_1^* + 2x_2^* = 0$$

- Elles sont satisfaites aux points  $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{15}{6}, \frac{5}{4}) = (2.5, 1.25)$  et  $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$ .
- La fonction  $f$  possède **deux valeurs stationnaires**, une au point  $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{15}{6}, \frac{5}{4})$ , et une au point  $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$ .

# Conditions du premier ordre

## Exemple 1

$$(iv) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 - 1, \quad f_2 = 2x_2 \quad \text{et} \quad f_3 = 8x_3 + 2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$4x_1^* - 1 = 0, \quad 2x_2^* = 0 \quad \text{et} \quad 8x_3^* + 2 = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}) = (0.25, 0, -0.25)$ .
- La fonction  $f$  possède une **unique valeur stationnaire** au point  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4})$ .

# Conditions du premier ordre

## Exemple 1

$$(v) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 2x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = -2x_2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$2x_1^* = 0 \quad \text{et} \quad -2x_2^* = 0$$

- Elles sont satisfaites (uniquement) au point  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ .
- La fonction  $f$  possède une **unique valeur stationnaire** au point  $(0, 0)$ .

# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- On considère un **monopole multiproduit** produisant deux biens. Le bien 1 est produit en quantité  $x_1$ , vendu au prix unitaire  $p_1$ , et le bien 2 est produit en quantité  $x_2$ , vendu au prix unitaire  $p_2$ .
- Les **fonctions de demande** (supposées **linéaires**) sont

$$x_1(p_1, p_2) = 100 - 2p_1 + p_2$$

$$x_2(p_1, p_2) = 120 + 3p_1 - 5p_2$$

- Comme  $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} > 0$  et  $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$ , les biens sont des **substituts** pour les consommateurs.

# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- Les **fonctions de demande inverses** sont

$$p_1(x_1, x_2) = \frac{620}{7} - \frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2$$

$$p_2(x_1, x_2) = \frac{540}{7} - \frac{3}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2$$

- Remarquons que  $\frac{\partial p_1}{\partial x_2} < 0$  et  $\frac{\partial p_2}{\partial x_1} < 0$ .
- Par exemple si la production de  $x_1$  augmente, son prix  $p_1$  baisse, la demande de bien 2 diminue (car substitués) et son prix  $p_2$  baisse pour tout niveau de production de bien 2. Donc  $\frac{\partial p_2}{\partial x_1} < 0$ . La demande inverse de bien 2 se déplace parallèlement à elle-même vers le bas dans le repère  $(x_2, p_2)$ .

# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- Supposons que la **fonction de coût** du **monopole** est également **linéaire**:

$$C(x_1, x_2) = 50 + 10x_1 + 20x_2$$

- La **fonction de profit** est

$$\pi(x_1, x_2) = p_1(x_1, x_2)x_1 + p_2(x_1, x_2)x_2 - C(x_1, x_2)$$



- En injectant les **demandes inverses** et la **fonction de coût** dans la **fonction de profit**, on obtient

$$\begin{aligned}\pi(x_1, x_2) &= p_1(x_1, x_2)x_1 + p_2(x_1, x_2)x_2 - C(x_1, x_2) \\ &= \left[ \frac{620}{7} - \frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 \right] x_1 + \left[ \frac{540}{7} - \frac{3}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2 \right] x_2 \\ &\quad - [50 + 10x_1 + 20x_2] \\ &= -\frac{5}{7}x_1^2 - \frac{2}{7}x_2^2 - \frac{4}{7}x_1x_2 + \frac{550}{7}x_1 + \frac{400}{7}x_2 - 50\end{aligned}$$

# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- D'après le **Théorème 1**, les **conditions du premier ordre** sont:

$$\pi_1(x_1^*, x_2^*) = -\frac{10}{7}x_1^* - \frac{4}{7}x_2^* + \frac{550}{7} = 0$$

$$\pi_2(x_1^*, x_2^*) = -\frac{4}{7}x_2^* - \frac{4}{7}x_1^* + \frac{400}{7} = 0$$

# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- Les **conditions du premier ordre** sont équivalentes à

$$5x_1^* + 2x_2^* = 275$$

$$x_2^* + x_1^* = 100$$

- Les solutions sont  $(x_1^*, x_2^*) = (25, 75)$ . En injectant les solutions dans les **demandes inverses** on a  $(p_1^*, p_2^*) = (60, 45)$ . En injectant les solutions dans la **fonction de coût** on a  $C^* = 1800$ . En injectant les solutions dans la **fonction de profit** on a  $\pi^* = 3075$ .
- Nous verrons comment vérifier que c'est un **maximum** dans la section suivante.

# Conditions du premier ordre

## Règle de Cramer

- La **règle de Cramer** permet de **résoudre** les **systèmes d'équations linéaires**

$$ax_1 + bx_2 = e$$

$$cx_1 + dx_2 = f$$

- Sous **forme matricielle**, il s'écrit:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

# Conditions du premier ordre

## Règle de Cramer

- Si  $ad - bc \neq 0$  le système admet une **unique solution**

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - bc} \quad \text{et} \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- On peut appliquer la **règle de Cramer** pour le **système d'équations linéaires** formé par les **conditions du premier ordre** associées à la **maximisation du profit du monopole multiproduit**.
- Sous **forme matricielle**, il s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 100 \end{pmatrix}$$

où  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ,  $e = 275$  et  $f = 100$ .

# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- Obtient une **unique solution** (car  $ad - bc = 3 \neq 0$ ):

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 275 & 2 \\ 100 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{275 - 200}{5 - 2} = \frac{75}{3} = 25$$

$$x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 275 \\ 1 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{500 - 275}{5 - 2} = \frac{225}{3} = 75$$

# Conditions du premier ordre

## Règle de Cramer

- On peut également appliquer la **règle de Cramer** pour trouver les **demandes inverses**.
- Sous **forme matricielle** elles s'écrivent:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - x_1 \\ 120 - x_2 \end{pmatrix}$$

où  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = -3$ ,  $d = 5$ ,  $e = 100 - x_1$  et  $f = 120 - x_2$ .



# Conditions du premier ordre

## Monopole multiproduit

- Obtient une **unique solution** (car  $ad - bc = 7 \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{\begin{vmatrix} 100 - x_1 & -1 \\ [120 - x_2] & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{[100 - x_1] 5 - [120 - x_2] [-1]}{10 - 3} \\ &= \frac{620 - 5x_1 - x_2}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2^* &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 100 - x_1 \\ -3 & [120 - x_2] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2 [120 - x_2] - [100 - x_1] [-3]}{10 - 3} \\ &= \frac{540 - 3x_1 - 2x_2}{7} \end{aligned}$$

# Conditions du premier ordre

## Duopole de Cournot

- Deux entreprises en situation de **duopole**, l'entreprise 1 et l'entreprise 2, produisent le même bien, et le vendent sur un marché dont la fonction de demande est **linéaire**:

$$P(Q) = 100 - Q$$

où

$$Q = q_1 + q_2$$

est la quantité totale de bien sur le marché, et où  $q_i$  est la quantité fournie par l'entreprise  $i = 1, 2$ .

# Conditions du premier ordre

## Duopole de Cournot

- Dans le modèle du **duopole de Cournot**, chaque entreprise choisit son **niveau de production** (concurrence par les quantités) dans le but de **maximiser son profit**, quel que soit le niveau de production de l'autre entreprise (quelle considère comme une donnée). Pour simplifier, on suppose qu'elles ont le même coût, normalisé à zéro.
- La **fonction de profit** de l'entreprise 1 est

$$\pi(q_1) = P(Q) q_1 = [100 - q_1 - q_2] q_1$$

- La **fonction de profit** de l'entreprise 2 est

$$\pi(q_2) = P(Q) q_2 = [100 - q_1 - q_2] q_2$$

# Conditions du premier ordre

## Duopole de Cournot

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial \pi (q_1)}{\partial q_1} = 100 - 2q_1 - q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi (q_2)}{\partial q_2} = 100 - q_1 - 2q_2 = 0$$

- Elles donnent ce que l'on nomme des **fonctions de réaction** ou **fonctions de meilleure réponse**:

$$q_1 = MR_1 (q_2) = 50 - \frac{1}{2}q_2$$

$$q_2 = MR_2 (q_1) = 50 - \frac{1}{2}q_1$$

# Conditions du premier ordre

## Duopole de Cournot

- A l'**équilibre de Cournot** (qui est un **équilibre de Nash** du point de vue de la **théorie des jeux**), chaque entreprise produit une quantité qui est une **meilleure réponse** à la quantité de l'autre:

$$q_1^* = MR_1(q_2^*) \quad \text{et} \quad q_2^* = MR_2(q_1^*)$$

- L'**unique solution** est  $q_1^* = q_2^* = \frac{100}{3}$ . Ainsi,  $Q^* = \frac{200}{3}$ ,  $P^* = \frac{100}{3}$  et  $\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{10000}{9}$ .

# Conditions du premier ordre

## Règle de Cramer

- On peut utiliser la **règle de Cramer** pour trouver l'**équilibre** du **duopole de Cournot**.
- Sous **forme matricielle**, les **fonctions de meilleure réponse** s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

où  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{2}$ ,  $d = 1$ ,  $e = 50$  et  $f = 50$ .

# Conditions du premier ordre

## Règle de Cramer

- Comme  $ad - bc = \frac{3}{4} \neq 0$  le système admet une **unique solution**

$$q_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 50 & \frac{1}{2} \\ 50 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{50 - 50\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{100}{3}$$
$$q_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ \frac{1}{2} & 50 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{50 - 50\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{100}{3}$$

# Conditions du premier ordre

## Duopole de Cournot

- On peut remarquer que comme les **conditions du premier ordre** forment un système d'équations linéaires, elles correspondent aux équations de deux droites dans le repère  $(q_1, q_2)$ .

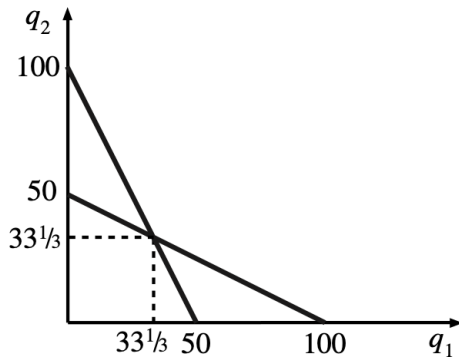
$$\frac{\partial \pi(q_1)}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow q_2 = 100 - 2q_1$$
$$\frac{\partial \pi(q_2)}{\partial q_2} = 0 \Leftrightarrow q_2 = 50 - \frac{1}{2}q_1$$

- L'**unique solution** est obtenue lorsque les deux droites se croisent, le point d'intersection vérifiant les deux **conditions du premier ordre** simultanément.
- Ceci est illustré **Figure 4**.



# Conditions du premier ordre

Figure 4. Duopole de Cournot



# Thème 2: Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- 2.1. Conditions du premier ordre
- 2.2. **Conditions du second ordre**
- 2.3. Restrictions directes sur les variables

- Les **conditions du premier ordre** ne permettent pas de distinguer une **valeur maximale**, d'une **valeur minimale**, d'un **point d'inflexion** ou d'un **point selle**, car elles sont vérifiées dans chacun de ces cas.
- Les **conditions du second ordre** permettent d'effectuer cette distinction.

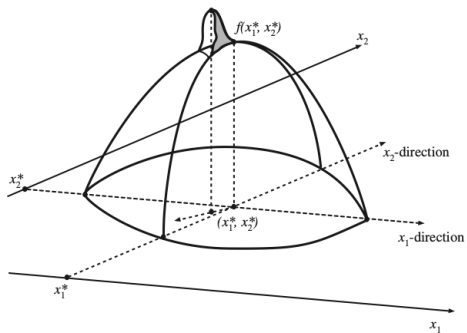
- Supposons qu'une fonction admette une **valeur stationnaire** au point  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . Si nous effectuons de "petites" variations à partir de ce point dans **toutes les directions possibles**, et que le résultat est de:
  - **Toujours réduire** la valeur de la fonction, alors nous savons que  $\mathbf{x}^*$  correspond à un **maximum local**.
  - **Toujours augmenter** la valeur de la fonction, alors nous savons que  $\mathbf{x}^*$  correspond à un **minimum local**.
  - **Réduire** la valeur de la fonction dans **certaines directions** et **augmenter** la valeur de la fonction dans **les autres directions**, alors nous savons que  $\mathbf{x}^*$  correspond à un **point selle**.

- Noter qu'effectuer des variations dans **toutes les directions possibles** ne signifie pas faire varier  $x_1$  seulement, puis  $x_2$  seulement, ..., puis  $x_n$  seulement.
- Si tel était le cas, une partie seulement de **toutes les direction possibles de variation** serait effectuée. Cela ne garantirait pas un **extremum local**.

- La **Figure 5** illustre ce point pour une fonction à deux variables.
- Quitter le **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*)$  dans la direction  $x_1$  seulement (i.e.  $dx_1 \neq 0$  et  $dx_2 = 0$ ), ou la direction  $x_2$  seulement (i.e.  $dx_1 = 0$  et  $dx_2 \neq 0$ ), réduit la valeur de la fonction. Mais quitter  $(x_1^*, x_2^*)$  dans la direction indiquée (non parallèle aux axes), à la fois dans la direction  $x_1$  et la direction  $x_2$  (i.e.  $dx_1 < 0$  et  $dx_2 < 0$ ), la fonction augmente. Donc le **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*)$  ne correspond pas à un **maximum local**.

# Conditions du second ordre

Figure 5



- La nécessité de prendre en compte **toutes les directions possibles de variation** est ce qui complique l'analyse des **conditions du second ordre** (par rapport aux fonctions à une variable).
- Comme nous l'avons observé **Section 1.4.**, c'est cette même nécessité qui complique la détermination de la **courbure** des fonctions à plusieurs variables (par rapport aux fonctions à une variable).
- Nous avons en effet remarqué qu'étudier le signe des **dérivées partielles directes d'ordre 2** ne suffisait pas (car elles donnent la **courbure** seulement dans la direction  $x_i$  d'une des variables).



- Le signe de la **dérivée partielle directe d'ordre 2**,  $f_{ij}$ , nous renseigne sur la **courbure** de  $f$  dans la direction de  $x_j$ .
- Si un point  $\mathbf{x}^*$  correspond à un **maximum**, alors on doit avoir  $f_{ii}(\mathbf{x}^*) < 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
- Cette condition est **nécessaire**, mais elle n'est pas **suffisante**.

- La condition **nécessaire** et **suffisante** est obtenue en envisageant **n'importe quelle direction possible de variation** à partir de  $\mathbf{x}^*$ .
- On doit alors étudier le signe de la **différentielle totale d'ordre 2** pour s'assurer que la **courbure** est **concave** ou **convexe** dans **toutes les directions aux alentours proches** de  $\mathbf{x}^*$ .

- Si une fonction prend une **valeur stationnaire au point  $\mathbf{x}^*$** , on sait que  $dy = df(\mathbf{x}^*) = 0$ .
- Si, pour n'importe quelle "petite" variation autour de  $\mathbf{x}^*$ ,  $dy$  **diminue** ( $d^2y < 0$ ) et devient **négative**, alors il s'agit d'un **maximum local**.
- Si, pour n'importe quelle "petite" variation autour de  $\mathbf{x}^*$ ,  $dy$  **augmente** ( $d^2y > 0$ ) et devient **positive**, alors il s'agit d'un **minimum local**.

- Les **conditions suffisantes** pour un **maximum local** ou un **minimum local** s'expriment donc en fonction de l'**évolution** de la **différentielle totale d'ordre 1**  $dy$  lorsque l'on s'éloigne de  $\mathbf{x}^*$ , donnée par le signe de la **différentielle totale d'ordre 2**,  $d^2y = d^2f(\mathbf{x}^*)$ .
- La **différentielle totale d'ordre 2** de  $f$  au point  $\mathbf{x}^*$  (voir **Section 1.4**) est

$$d^2y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(\mathbf{x}^*) dx_i dx_j$$

## Theorem (3)

Pour toute fonction à  $n$  variables  $y = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , deux fois continûment différentiable, si

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

et

$$d^2y = d^2f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(\mathbf{x}^*) dx_i dx_j < 0$$

i.e.  $H$  est **définie négative** au point  $\mathbf{x}^*$ , alors la fonction  $f$  atteint un **maximum local** au point  $\mathbf{x}^*$ .

## Theorem (4)

Pour toute fonction **strictement concave** à  $n$  variables  $y = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , si

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

alors la fonction  $f$  atteint un **unique maximum global** au point  $\mathbf{x}^*$ .

## Theorem (5)

Pour toute fonction à  $n$  variables  $y = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , deux fois continûment différentiable, si

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

et

$$d^2y = d^2f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(\mathbf{x}^*) dx_i dx_j > 0$$

i.e.  $H$  est **définie positive** au point  $\mathbf{x}^*$ , alors la fonction  $f$  atteint un **minimum local** au point  $\mathbf{x}^*$ .

## Theorem (6)

Pour toute fonction **strictement convexe** à  $n$  variables  $y = f(\mathbf{x})$ ,  
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , si

$$f_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

alors la fonction  $f$  atteint un **unique minimum global** au point  $\mathbf{x}^*$ .



## Exemple (2)

Pour chacune des fonctions de l'**Exemple 1**, déterminons si le **point stationnaire** identifié est un **maximum local** ou **global**, un **minimum local** ou **global**, ou encore un **point selle**.

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

$$(i) \quad f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2.$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = 2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 4 \quad f_{12} = f_{21} = 0 \quad \text{et} \quad f_{22} = 2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$|H_1| = |f_{11}| = f_{11} = 4 > 0$$

$$|H_2| = |H| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

- $H$  est donc **définie positive** en tout point. La fonction  $f$  est **strictement convexe**. D'après le **Théorème 6**, la fonction  $f$  atteint un **unique minimum global** au **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ .

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

$$(ii) \quad f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2.$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = -2 \quad f_{12} = f_{21} = 1 \quad \text{et} \quad f_{22} = -2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$|H_1| = -2 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

- $H$  est donc **définie négative** en tout point. La fonction  $f$  est **strictement concave**. D'après le **Théorème 4**, la fonction  $f$  atteint un **unique maximum global** au **point stationnaire**  
 $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$ .

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

(iii)  $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1^3$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 8x_1 - x_2 - 3x_1^2 \quad \text{et} \quad f_2 = -x_1 + 2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 8 - 6x_1 \quad f_{12} = f_{21} = -1 \quad \text{et} \quad f_{22} = 2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} 8 - 6x_1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- On a identifié deux **points stationnaires** dans le cas (iii):  
 $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{15}{6}, \frac{5}{4}\right)$  et  $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$ .

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

- Au **point stationnaire**  $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$ , les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$|H_1| = 8 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0$$

- $H$  est donc **définie positive** au **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ . D'après le **Théorème 5**, la fonction  $f$  atteint un **minimum local** au **point stationnaire**  $(x_1^{**}, x_2^{**}) = (0, 0)$ .

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

- Au **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{15}{6}, \frac{5}{4})$ , les **déterminants des sous matrices principales successives** sont

$$|H_1| = 8 - 6\frac{15}{6} = -7 < 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -15 < 0$$

- $H$  n'est ni **définie négative**, ni **définie positive**, au **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{15}{6}, \frac{5}{4})$ . On ne peut ni appliquer le **Théorème 3**, ni appliquer le **Théorème 5**. On a un **point selle**. En effet  $f_{11} = -7 < 0$  (**maximum** dans la direction  $x_1$ ) et  $f_{22} = 2 > 0$  (**minimum** dans la direction de  $x_2$ ).



# Conditions du second ordre

## Exemple 2

$$(iv) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4x_1 - 1, \quad f_2 = 2x_2 \quad \text{et} \quad f_3 = 8x_3 + 2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 4, \quad f_{22} = 2, \quad f_{33} = 8 \quad \text{et} \quad f_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j)$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$|H_1| = 4 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = f_{11}D_{11} - f_{12}D_{12} + f_{13}D_{13}$$

$$= f_{11}D_{11} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

- $H$  est donc **définie positive** en tout point. La fonction  $f$  est **strictement convexe**. D'après le **Théorème 6**, la fonction  $f$  atteint un **unique minimum global** au **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4})$ .

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

$$(v) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 2x_1 \quad \text{et} \quad f_2 = -2x_2$$

- Les **dérivées partielles d'ordre 2** sont

$$f_{11} = 2 \quad f_{12} = f_{21} = 0 \quad \text{et} \quad f_{22} = -2$$

- La **matrice Hessienne** est

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

# Conditions du second ordre

## Exemple 2

- Les **déterminants** des **sous matrices principales successives** sont

$$|H_1| = 2 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

- $H$  n'est ni **définie négative**, ni **définie positive**, au **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ . On ne peut ni appliquer le **Théorème 3**, ni appliquer le **Théorème 5**. On a un **point selle**. En effet  $f_{11} = 2 > 0$  (**minimum** dans la direction  $x_1$ ) et  $f_{22} = -2 < 0$  (**maximum** dans la direction de  $x_2$ ).

# Conditions du second ordre

Choix optimal des entrants pour une entreprise concurrentielle

- Une entreprise produit un bien en quantité  $y$ , grâce à deux **facteurs de production**, le travail  $L$  et le capital  $K$ .
- L'entreprise dispose d'une technologie de production de type **Cobb-Douglas**

$$y = AL^\alpha K^\beta \quad A, \alpha, \beta > 0$$

- L'entreprise vend le bien qu'elle produit sur un **marché concurrentiel** au prix  $p$ , et achète également ses entrants sur des **marchés concurrentiels** au prix  $w$  pour le travail, et au prix  $r$  pour le capital.

# Conditions du second ordre

Choix optimal des entrants pour une entreprise concurrentielle

- L'entreprise choisit ses facteurs de production  $L$  et  $K$  de manière à **maximiser son profit**

$$\begin{aligned}\pi(L, K) &= py - wL - rK \\ &= pAL^\alpha K^\beta - wL - rK\end{aligned}$$

- D'après la **Définition 1**, les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \alpha pAL^{\alpha-1}K^\beta - w = 0 \\ \pi_2 &= \beta pAL^\alpha K^{\beta-1} - r = 0\end{aligned}$$

# Conditions du second ordre

Choix optimal des entrants pour une entreprise concurrentielle

- D'après le **Théorème 4**, les **conditions du premier ordre** permettent d'identifier un **unique maximum global** si la **matrice Hessienne** est **définie négative** en tout point, impliquant que la **fonction de profit** est **strictement concave**.
- Les **déterminants des sous-matrices principales successives** sont:

$$\begin{aligned} |H_1| &= |\pi_{11}| = [\alpha - 1] \alpha p A L^{\alpha-2} K^\beta \\ |H_2| &= \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} [\alpha - 1] \alpha p A L^{\alpha-2} K^\beta & \alpha \beta p A L^{\alpha-1} K^{\beta-1} \\ \alpha \beta p A L^{\alpha-1} K^{\beta-1} & [\beta - 1] \beta p A L^\alpha K^{\beta-2} \end{vmatrix} \\ &= [1 - \alpha - \beta] \alpha \beta p^2 A^2 L^{2\alpha-2} K^{2\beta-2} \end{aligned}$$

# Conditions du second ordre

Choix optimal des entrants pour une entreprise concurrentielle

- $|H_1| < 0$  si  $\alpha < 1$ .
- $|H_2| > 0$  si  $\alpha + \beta < 1$  (**rendements d'échelle décroissants**).
- Sous ces hypothèses,  $H$  est **définie négative** en tout point. La **fonction de profit** est **strictement concave** et les **conditions de premier ordre** indiquent un **unique maximum global**.
- Noter que les **rendements d'échelle croissants** ( $\alpha + \beta > 1$ ) ou **constants** ( $\alpha + \beta = 1$ ) sont incompatibles avec l'hypothèse de **marchés concurrentiels**.



# Thème 2: Optimisation des fonctions à plusieurs variables

- 2.1. Conditions du premier ordre
- 2.2. Conditions du second ordre
- 2.3. **Restrictions directes sur les variables**

# Restrictions directes sur les variables

- Dans la majorité des problèmes économiques, les agents décident du niveau d'une variable qui appartient à un **intervalle**.
- Par exemple, les **quantités** et les **prix** sont **positifs** et ne sont **jamais infinis**.
- Si une entreprise est soumise à un **quota de production**, elle choisit son niveau de production dans l'intervalle  $[0, y^{\max}]$ .
- De même, si un individu répartit son revenu entre consommation et épargne, cela équivaut à choisir une proportion  $\alpha \in [0, 1]$  du revenu qui est consommée, la proportion  $(1 - \alpha)$  étant alors épargnée.

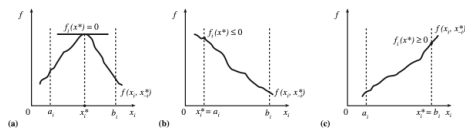
- Dans la **résolution mathématique des modèles économiques**, il est souvent utile de rendre **explicites** les **restrictions directes sur les variables**.
- Noter que si la restriction concernant une variable est **implicite**, il n'y a pas de perte de généralité à la rendre **explicite** (e.g. quantité positive).
- Cela permet parfois de résoudre des difficultés à interpréter les **conditions du premier ordre**.

- Dans le contexte des **fonctions à plusieurs variables**, supposons que chaque variable appartient à un **intervalle**, i.e.  $a_i \leq x_i \leq b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Pour certaines variables, on peut avoir  $a_i = -\infty$  et/ou  $b_i = +\infty$  (pas de restriction à gauche ou à droite, ou pas de restriction du tout).
- Supposons simplement que pour au moins une variable,  $a_i$  et  $b_i$  prennent des valeurs finies (avec évidemment  $a_i < b_i$ ).

- Supposons qu'une fonction  $f(\mathbf{x})$ , atteigne une valeur maximale au point  $\mathbf{x}^*$ .
- Alors pour chaque variable  $x_i$ , on a seulement trois cas possibles.
- Ces trois cas sont illustrés **Figure 6**, où le vecteur  $\mathbf{x}_{-i}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$  contient toutes les variables sauf la variable  $x_i$ .

# Restrictions directes sur les variables

Figure 6



- **Cas 1 (solution intérieure):**  $a_i < x_i^* < b_i$  . On doit **nécessairement** avoir  $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$ . Sinon, on peut augmenter la valeur de la fonction en se déplaçant à gauche ou à droite de  $\mathbf{x}^*$  (en contradiction avec le fait que  $f$  atteint une valeur maximale au point  $\mathbf{x}^*$ ).
- On peut le voir avec la **différentielle totale**.
- Si  $f_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$ , on peut choisir  $dx_i \neq 0$  telle que  $df = f_i(\mathbf{x}^*) dx_i > 0$ .

- **Cas 2 (solution en coin à gauche):**  $x_i^* = a_i$ . On doit **nécessairement** avoir  $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ . Sinon, on peut augmenter la valeur de la fonction en se déplaçant à droite de  $\mathbf{x}^*$  (en contradiction avec le fait que  $f$  atteint une valeur maximale au point  $\mathbf{x}^*$ ).
- On peut le voir avec la **différentielle totale**.
- Si  $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$ , on peut choisir  $dx_i > 0$  telle que  $df = f_i(\mathbf{x}^*) dx_i > 0$ .
- Par contre, si  $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$ , on peut choisir  $dx_i < 0$  telle que  $df = f_i(\mathbf{x}^*) dx_i > 0$ , mais on violerait la contrainte  $x_i \geq a_i$ .
- De même, si  $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$ , on peut choisir  $dx_i \neq 0$ , mais on a  $df = f_i(\mathbf{x}^*) dx_i = 0$ .



- **Cas 3 (solution en coin à droite):**  $x_i^* = b_i$ . On doit **nécessairement** avoir  $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$ . Sinon, on peut augmenter la valeur de la fonction en se déplaçant à gauche de  $\mathbf{x}^*$  (en contradiction avec le fait que  $f$  atteint une valeur maximale au point  $\mathbf{x}^*$ ).
- On peut le voir avec la **différentielle totale**.
- Si  $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$ , on peut choisir  $dx_i < 0$  telle que  $df = f_i(\mathbf{x}^*) dx_i > 0$ .
- Par contre, si  $f_i(\mathbf{x}^*) > 0$ , on peut choisir  $dx_i > 0$  telle que  $df = f_i(\mathbf{x}^*) dx_i > 0$ , mais on violerait la contrainte  $x_i \leq b_i$ .
- De même si  $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$ , on peut choisir  $dx_i \neq 0$ , mais on a  $df = f_i(\mathbf{x}^*) dx_i = 0$ .

- Ces observations conduisent au **Théorème 7** et au **Théorème 8** ci-dessous.

## Theorem (7)

*Si  $\mathbf{x}^*$  est une solution du programme*

$$\max_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}) \quad \text{s.c. } a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

*alors,  $\forall i = 1, \dots, n$ , au moins une des conditions suivantes est vérifiée:*

- 1.  $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$  si  $x_i^* < b_i$ .*
- 2.  $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$  si  $x_i^* > a_i$ .*

- Remarquer que dans le cas d'une **solution intérieure**, i.e. si  $a_i < x_i^* < b_i$ , alors la **condition 1** "et" la **condition 2** du **Théorème 7** doivent être vérifiées.
- Noter également que différentes conditions peuvent être vérifiées pour différentes variables. Par exemple,  $x_1^*$  vérifie la **condition 2** seulement, tandis que  $x_2^*$  vérifie les **conditions 1 et 2**.
- Avec les mêmes arguments supportant le **Théorème 7**, on peut établir le **Théorème 8** pour un **programme de minimisation**.

## Theorem (8)

Si  $\mathbf{x}^*$  est une solution du programme

$$\min_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}) \quad \text{s.c. } a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

alors,  $\forall i = 1, \dots, n$ , au moins une des conditions suivantes est vérifiée:

1.  $f_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$  si  $x_i^* < b_i$ .
2.  $f_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$  si  $x_i^* > a_i$ .

- Encore une fois, dans le cas d'une **solution intérieure**, i.e. si  $a_i < x_i^* < b_i$ , alors la **condition 1** "et" la **condition 2** du **Théorème 8** doivent être vérifiées.

## Exemple (3)

Résolvons les **programmes de maximisation** suivants:

$$(i) \quad \max_{x_1, x_2} : y = 10x_1 - 5x_2 \quad \text{s.c. } 0 \leq x_1 \leq 20, 0 \leq x_2 \leq 20$$

$$(ii) \quad \max_{x_1, x_2} : y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \quad \text{s.c. } 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10$$

$$(iii) \quad \max_{x_1, x_2} : y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$$
$$\text{s.c. } 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10$$

$$(iv) \quad \max_{x_1, x_2} : y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$$
$$\text{s.c. } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$$

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

$$(i) \quad \max_{x_1, x_2} : y = 10x_1 - 5x_2 \quad \text{s.c.} \quad 0 \leq x_1 \leq 20, 0 \leq x_2 \leq 20$$

- Sans contraintes, il n'y aurait pas de solution car la fonction est **linéaire** et  $f_1 = 10 > 0$  et  $f_2 = -5 < 0$ .
- Compte tenu des contraintes, et du signe des **dérivées partielles d'ordre 1**, on peut conclure aisément que  $x_1^* = b_1 = 20$  et  $x_2^* = a_2 = 0$ .
- Les deux contraintes sont **saturées**. La **solution en coin**  $\mathbf{x}^* = (20, 0)$  satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
  - $f_1(20, 0) = 10 \geq 0$  (**condition 2** car  $x_1^* > a_1$ ).
  - $f_2(20, 0) = -5 \leq 0$  (**condition 1** car  $x_2^* < b_2$ ).



# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

$$(ii) \quad \max_{x_1, x_2} : y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \quad \text{s.c. } 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10$$

- Compte tenu des contraintes, et du signe des **dérivées partielles d'ordre 1**, on peut conclure aisément que  $x_1^* = 10$  et  $x_2^* = 10$ .
- Les deux contraintes sont **saturées**. La **solution en coin**  $\mathbf{x}^* = (10, 10)$  satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
  - $f_1(10, 10) = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \geq 0$  (**condition 2** car  $x_1^* > a_1$ ).
  - $f_2(10, 10) = \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \geq 0$  (**condition 2** car  $x_2^* > a_2$ ).

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

$$(iii) \quad \max_{x_1, x_2} : y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \quad 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10$$

- Nous avons étudié cette fonction dans l'**Exemple 1** et trouvé un **point stationnaire**  $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{10}{3}, \frac{8}{3}) \approx (3.33, 2.67)$ . Ainsi, on sait que  $f_1(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}) = 0$  et  $f_2(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}) = 0$ .
- Aucune des contraintes n'est **saturée**. La **solution intérieure**  $\mathbf{x}^* = (\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$  satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
  - $f_1(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}) = 0$  (**conditions 1 et 2** car  $a_1 < x_1^* < b_1$ ).
  - $f_2(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}) = 0$  (**conditions 1 et 2** car  $a_2 < x_2^* < b_2$ ).

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

$$(iv) \quad \max_{x_1, x_2} : y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \quad 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$$

- Nous avons la même fonction que dans (iii) mais avec des **restrictions** différentes.
- Au point stationnaire  $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$ ,  $x_1^* \notin [0, 1]$  ne vérifie pas la restriction, tandis que  $x_2^*$  **sature** la contrainte à droite.
- Nous pourrions être tentés de conclure que la solution est  $(x_1^*, x_2^*) = (1, \frac{8}{3})$ . Mais attention ce n'est pas le cas.

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

- Les **dérivées partielles d'ordre 1** sont

$$f_1 = 4 - 2x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad f_2 = 2 - 2x_2 + x_1$$

- Ainsi, au point  $(x_1^*, x_2^*) = (1, \frac{8}{3})$ , on a

$$f_1 \left( 1, \frac{8}{3} \right) = \frac{14}{3} \approx 4,67 > 0$$

$$f_2 \left( 1, \frac{8}{3} \right) = -\frac{7}{3} \approx -2,34 < 0$$

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

- Les **conditions nécessaires** du **Théorème 7** sont satisfaites pour  $x_1^* = 1$  mais pas pour  $x_2^* = \frac{8}{3}$ :
  - $f_1\left(1, \frac{8}{3}\right) = 4,67 \geq 0$  (**condition 2** car  $x_1^* > a_1$ ).
  - $f_2\left(1, \frac{8}{3}\right) = -2,34 \not\geq 0$  (**condition 2** car  $x_2^* > a_2$ ).
- Le point  $(x_1^*, x_2^*) = \left(1, \frac{8}{3}\right)$  n'est pas solution du **programme de maximisation** (iv).

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

- On peut remarquer que  $f_1 > 0$  pour tout  $(x_1, x_2)$  satisfaisant les restrictions. La solution est donc telle que  $x_1^* = 1$ .
- Nous venons de voir qu'au point  $(1, \frac{8}{3})$ , on a  $f_2 < 0$ . On peut alors augmenter  $y$  en réduisant  $x_2$ . Mais de combien?
- On peut trouver la solution en fixant  $x_1^* = 1$  et en maximisant la fonction  $f(1, x_2)$  par rapport à  $x_2 \in [0, \frac{8}{3}]$ :

$$\max_{x_2} : f(1, x_2) = 3 + 3x_2 - x_2^2 \quad \text{s.c. } 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$$

- On peut s'attendre à une **solution intérieure** avec

$$f_2(1, x_2) = 3 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{3}{2}$$

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

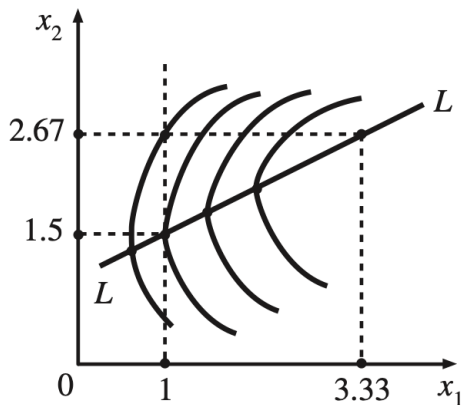
- Le point  $\mathbf{x}^* = \left(1, \frac{3}{2}\right)$  satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**:
  - $f_1 \left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} \geq 0$  (**condition 2** car  $x_1^* > a_1$ ).
  - $f_2 \left(1, \frac{3}{2}\right) = 0$  (**conditions 1 et 2** car  $a_2 < x_2^* < b_2$ ).
- Le point  $(x_1^*, x_2^*) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$  satisfait les **conditions nécessaires** du **Théorème 7**.

- La **Figure 7** illustre ce qui se produit pour le programme (iv).
- La forme des courbes de niveau reflète la **concavité** de la fonction.
- Le point  $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}) \approx (3.33, 2.67)$  ne satisfait pas les restrictions car  $\frac{10}{3} > 1$ .
- Le point  $(1, \frac{8}{3}) \approx (1, 2.67)$  satisfait les restrictions mais ne maximise pas la fonction.
- Le point  $(1, 1.5)$  satisfait les restrictions et maximise la fonction. C'est la solution du **programme de maximisation** (iv).



# Restrictions directes sur les variables

Figure 7



# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

- On peut considérer que nous avons beaucoup "tâtonné" pour identifier la solution du **programme de maximisation (iv)**.
- Une méthode plus systématique consiste à d'abord résoudre le problème avec  $x_1$  fixée. Puis de résoudre le problème avec  $x_2$  fixée (en tenant compte de la solution du problème avec  $x_1$  fixée):

$$\max_{x_2} : f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \quad \text{s.c. } 0 \leq x_2 \leq \frac{8}{3}$$

- La **condition du premier ordre** est:

$$f_2(x_1, x_2) = 2 - 2x_2 + x_1 = 0 \Rightarrow x_2^* = 1 + \frac{1}{2}x_1$$

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

- On injecte la solution dans la fonction:

$$\begin{aligned}f\left(x_1, 1 + \frac{1}{2}x_1\right) &= 4x_1 + 2\left[1 + \frac{1}{2}x_1\right] - x_1^2 \\ &\quad - \left[1 + \frac{1}{2}x_1\right]^2 + x_1\left[1 + \frac{1}{2}x_1\right] \\ &= 1 + 5x_1 - \frac{3}{4}x_1^2\end{aligned}$$

- On maximise alors par rapport à  $x_1$

$$\max_{x_1} f\left(x_1, 1 + \frac{1}{2}x_1\right) = 1 + 5x_1 - \frac{3}{4}x_1^2 \quad \text{s.c. } 0 \leq x_1 \leq 1$$

- La solution évidente est  $x_1^* = 1$ . Ainsi  $x_2^* = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

# Restrictions directes sur les variables

## Exemple 3

- Graphiquement, sur la **Figure 7**, la première étape consiste à trouver l'équation de la droite  $LL$  ( $x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_1$ ) qui contient toutes solutions pour  $x_1$  donnée. Puis on applique  $x_1 = 1$  pour trouver la solution globale  $(x_1^*, x_2^*) = (1, \frac{3}{2})$ .

# Restrictions directes sur les variables

## Monopole discriminant avec un quota de production

- Considérons un **monopole** produisant un bien vendu dans deux pays différents, le pays 1 (domestique) et le pays 2 (étranger).
- Les **fonctions de demande inverse** sont

$$p_1 = 100 - q_1 \quad \text{et} \quad p_2 = 80 - 2q_2$$

- La **fonction de coût total** du **monopole** est

$$CT(Q) = Q^2 = [q_1 + q_2]^2$$

où  $Q$  est la **quantité totale produite**.

# Restrictions directes sur les variables

## Monopole discriminant avec un quota de production

- Remarquons que le **monopole** est supposé pouvoir vendre sur chacun des deux marchés au même coût.
- Il peut donc **arbitrer** librement (sans coût supplémentaire) entre les deux marchés.
- En l'absence de contrainte, on peut résoudre le problème du **monopole discriminant**.

# Restrictions directes sur les variables

Monopole discriminant avec un quota de production

- Le **monopole** choisit  $q_1$  et  $q_2$  de manière à **maximiser sa fonction de profit**:

$$\max_{q_1, q_2} : \pi(q_1, q_2) = [100 - q_1] q_1 + [80 - 2q_2] q_2 - [q_1 + q_2]^2$$

- Les **conditions du premier ordre** sont:

$$\pi_1 = 100 - 4q_1 - 2q_2 = 0$$

$$\pi_2 = 80 - 6q_2 - 2q_1 = 0$$

- Les **solutions** sont  $q_1^* = 22$  et  $q_2^* = 6$ . Ainsi,  $p_1^* = 78$ ,  $p_2^* = 68$ ,  $Q^* = 28$ ,  $CT^* = 784$ ,  $\pi^* = 1340$ .

# Conditions du premier ordre

## Règle de Cramer

- On peut utiliser la **règle de Cramer** pour trouver l'**équilibre** du **monopole discriminant**.
- Sous **forme matricielle**, les **conditions du premier ordre** s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix}$$

où  $a = 4$ ,  $b = 2$ ,  $c = 2$ ,  $d = 6$ ,  $e = 100$  et  $f = 80$ .



# Conditions du premier ordre

## Règle de Cramer

- Comme  $ad - bc = 20 \neq 0$  le système admet une **unique solution**

$$q_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 2 \\ 80 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 160}{24 - 4} = 22$$

$$q_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 100 \\ 2 & 80 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{320 - 200}{24 - 4} = 6$$

# Restrictions directes sur les variables

## Monopole discriminant avec un quota de production

- Supposons maintenant que l'entreprise soit accusée de "**dumping**" par le gouvernement du pays étranger, car elle y vend son bien moins cher qu'à domicile ( $p_2^* = 68 < 78 = p_1^*$ ).
- En représailles le gouvernement du pays étranger impose un quota d'importation pour le bien à hauteur de 4 unités.
- Déterminons l'impact de ce quota.

# Restrictions directes sur les variables

Monopole discriminant avec un quota de production

- Le **programme de maximisation du profit du monopole** devient

$$\max_{q_1, q_2} : \pi(q_1, q_2) \quad s.c. \quad q_2 \leq 4$$

- On pourrait introduire la contrainte  $q_2 \geq 0$ , mais comme nous avons trouvé une **solution intérieure** précédemment, on peut présumer que  $q_2^* > 0$ .

# Restrictions directes sur les variables

## Monopole discriminant avec un quota de production

- D'après le **Théorème 7**, on a les **conditions nécessaires** suivantes:
  - $\pi_1(q_1^*, q_2^*) = 100 - 4q_1^* - 2q_2^* = 0$  (**conditions 1 et 2** car  $a_1 < q_1^* < b_1$ ).
  - $\pi_2(q_1^*, q_2^*) = 80 - 6q_2^* - 2q_1^* \geq 0$  (**condition 2** si  $q_2^* = 4 > 0$ ).
  - $\pi_2(q_1^*, q_2^*) = 0$  (**conditions 1 et 2** si  $0 < q_2^* < 4$ ).
- Est-ce que  $0 < q_2^* < 4$ ? Si tel est le cas on doit avoir  $\pi_2(q_1^*, q_2^*) = 0$ . Mais nous avons montré que dans ce cas  $q_2^* = 6$ . La réponse est donc non.
- Est-ce que  $q_2^* = 4$ ? Si tel est le cas,  $\pi_1(q_1^*, 4) = 0$  donne  $q_1^* = 23$ . Ainsi  $\pi_2(23, 4) = 10 \geq 0$ . La **condition 2** est satisfaite. La réponse est oui,  $q_2^* = 4$ .

# Restrictions directes sur les variables

## Monopole discriminant avec un quota de production

- Finalement, on a  $q_1^* = 23$ ,  $q_2^* = 4$ ,  $p_1^* = 77$ ,  $p_2^* = 72$ ,  $Q^* = 27$ ,  $CT^* = 729$ ,  $\pi^* = 1330$ .
- L'**offre domestique**  $q_1^*$  **augmente** ( $22 \rightarrow 23$ ) et le **prix domestique**  $p_1^*$  **baisse** ( $78 \rightarrow 77$ ). L'**offre dans le pays étranger**  $q_2^*$  **diminue** ( $6 \rightarrow 4$ ) et le **prix dans le pays étranger**  $p_2^*$  **augmente** ( $68 \rightarrow 72$ ).
- Les **consommateurs du pays étranger** sont donc **perdants** suite à la politique de leur gouvernement.
- Les **consommateurs du pays domestique** sont **gagnants** suite à la politique du gouvernement étranger.
- Le **profit du monopole**  $\pi^*$  **diminue** également ( $1340 \rightarrow 1330$ ).

# Restrictions directes sur les variables

## Monopole discriminant avec un quota de production

- Le moins évident de ces résultats est la hausse de l'offre dans le pays domestique.
- La raison est que la **baisse de l'offre** sur le **marché étranger réduit** le **coût marginal de production** qui devient **inférieur** à la **recette marginale** sur le **marché domestique**.
- Il est alors optimal pour le **monopole** d'**augmenter l'offre** sur le **marché domestique**.