Module HAX201X
Année 2023/2024

Examen session 2
24 juin 2024
Durée : 3h

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Le barême est indicatif.

Exercice 1

Soit $u_0 \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$.

(1) (2 pts) Montrer que la suite (u_n) est bien définie, à valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$, et qu'elle est monotone.

(2) (2 pts) Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Exercice 2 (questions de cours)

Soit (u_n) une suite réelle.

(1) (0,5 pts) Rappeler la définition de : "(u_n) est une suite de Cauchy".

(2) (0,5 pts) Montrer que pour tous $\lambda \in]0, 1[$ et $p < q$ des entiers naturels, on a
$$\lambda^p + \ldots + \lambda^{q-1} = \lambda^p \frac{1 - \lambda^{q-p}}{1 - \lambda}.$$

(3) (2 pts) Dans cette question, on suppose qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ et $C > 0$ tels que $|u_{n+1} - u_n| \leq \lambda^n C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question (2), montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.

(4) (2 pts) On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \lambda$, où $\lambda \in]0, 1[$. À l'aide de la question (3) et du théorème des accroissements finis, montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (questions isolées)

(1) (3 pts) Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)\cos(x)}{x(e^x - 1)} \qquad \lim_{x \to 0} (\ln(1 + 2x))^{\frac{1}{x}}.$$

(2) (1 pt) Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

(3) (3 pts) Calculer le $DL_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$. En déduire l'équation de la tangente au graphe de la fonction $g(x) := \ln(\cos(x))/x^2$ au point d'abscisse $x = 0$, et sa position par rapport au graphe.

(4) (3 pts) Déterminer la nature des séries numériques suivantes :
$$S = \sum_{n \geq 0} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n \quad , \quad T = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 4

(1) (1 pt) Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange.

(2) (2 pts) Montrer que pour tout $y > 0$, on a

$$\frac{3}{2}y + \frac{3}{8\sqrt{y+1}}y^2 < (y+1)^{\frac{3}{2}} - 1 < \frac{3}{2}y + \frac{3}{8}y^2.$$

(3) (1 pt) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} < (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}.$$