Module HAX201X
Année 2024/2025

Introduction aux séries numériques

---

1. Premières notions

1.1. **Définitions.** Soit $(u_n)_{n\geq n_o}$ une suite de réels. On considère la suite $(S_N)_{n\geq n_o}$ définie par

$$S_N = \sum_{n=n_o}^{N} u_n.$$

Définition 1.1. — *La suite $(S_N)_{N\geq n_o}$ est appelée série de terme général u_n. On la note $\sum u_n$.*
— *Le terme S_N est appelé somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$.*

Ainsi une série n'est autre qu'un cas particulier de suite (suite des sommes partielles). Le but de cette note est de donner des outils pour comprendre le comportement de ce type de suites.

Définition 1.2. — *On dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_N)_{n\geq n_o}$ converge. Sa limite, appelée somme de la série, est alors notée*

$$\sum_{n=n_o}^{+\infty} u_n.$$

— *On dit que la série $\sum u_n$ diverge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_N)_{n\geq n_o}$ diverge.*

Voici quelques exemples classiques qui ont déjà été abordés dans le cours sur les suites :

- La série $\sum (-1)^n$ diverge.
- La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, la limite est égale à $\sum_0^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
- La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

1.2. **Condition nécessaire de convergence.** On a la remarque fondamentale suivante.

Proposition 1.3. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers* 0.

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ nous permet de voir que la réciproque de l'énonçé précédent est fausse : $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$ alors que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.3. **Reste d'une série convergente.**

Proposition 1.4. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite des restes $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ est bien définie et tend vers 0 quand $N \to +\infty$.*

1.4. **Somme de deux séries.**

Proposition 1.5.
- *Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes, alors la série $\sum(a_n + b_n)$ est convergente.*
- *Si $\sum a_n$ est convergente, tandis que $\sum b_n$ est divergente, alors la série $\sum(a_n + b_n)$ est divergente.*

---

2. Séries à termes positifs

Considérons une suite $(u_n)_{n\geq n_o}$ telle que

$$u_n \geq 0, \qquad \forall n \geq n_o.$$

Dans ce cas la suite $(S_N)_{N\geq n_o}$ des sommes partielles est croissante :

$$S_N - S_{N-1} = u_N \geq 0, \qquad \forall N \geq n_o.$$

Ainsi la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_N) est bornée. Notons que si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\lim_{n\to\infty} S_N = +\infty$.

2.1. **Comparaison avec une intégrale.** On travaille avec une série $\sum F(n)$ définie au moyen d'une fonction $F : [r, +\infty[\to \mathbb{R}$. On va comparer la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=n_o}^{N} F(n)$$

avec l'intégrale $I_N = \int_{n_o}^{N} F(t)dt$ (ici n_o est un entier supérieur à r).

Précisons nos hypothèses de travail :

(1) F prend des valeurs positives : $F(x) \geq 0, \forall x \geq r$.
(2) F est continue.
(3) F est décroissante et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

On remarque que la condition (1) découle de la condition (3). Nous la rajoutons afin de re-préciser le cadre dans lequel nous travaillons : des séries de terme général positif. Notons que sous ces hypothèses, le suite (I_N) est croissante : ainsi, (I_N) est convergente ou bien $\lim_{N\to\infty} I_N = +\infty$.

Proposition 2.1. *On a $S_N \underset{N\to\infty}{=} I_N + O(1)$. Cela implique les faits suivants :*

(a) La série $\sum F(n)$ est convergente si et seulement si la suite (I_N) est convergente.
(b) Si $\sum F(n)$ diverge, alors $S_N \underset{N\to\infty}{\sim} I_N$.

Exercice 2.2. Soit $\alpha \geq 0$.

- La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Si $\alpha \in [0, 1]$, alors

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N\to\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{si} \quad 0 \leq \alpha < 1, \\ \ln(N), & \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

- La série $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.2. **Critère de comparaison.** On a des critères de comparaison forts utiles.

Proposition 2.3. *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de terme général positif.*

Supposons que $a_n \underset{n\to\infty}{=} O(b_n)$. Alors :

- *Si la série $\sum b_n$ est convergente, alors la série $\sum a_n$ est convergente.*
- *Si la série $\sum a_n$ est divergente, alors la série $\sum b_n$ est divergente.*

Voici un raffinement de la proposition précédente

Proposition 2.4. *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de terme général positif.*

Supposons que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$. Alors :

- *$\sum a_n$ est convergente si et seulement si $\sum b_n$ est convergente.*
- *Dans le cas où les séries convergent on a, au niveau des restes, l'équivalence*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k.$$

- *Dans le cas où les séries divergent on a, au niveau des sommes partielles, l'équivalence*

$$\sum_{k=n_o}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n_o}^{n} b_k.$$

2.3. **Critères de Cauchy et de d'Alembert.**

Proposition 2.5 (Critère de de Cauchy)**.** *Soit $\sum a_n$ une série de terme général positif. Supposons que la suite $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers $L \geq 0$.*

- *Si $L < 1$, alors la série $\sum a_n$ est convergente.*
- *Si $L > 1$, alors la série $\sum a_n$ est divergente.*
- *Si $L = 1$, on ne peut pas conclure à ce stade.*

Exercice 2.6. Montrer les énonçés suivants :

- La série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.
- La série $\sum \frac{\ln(n)^n}{n^{\ln(n)}}$ diverge.

Proposition 2.7 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit $\sum a_n$ une série de terme général strictement positif. Supposons que la suite $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge vers $L \geq 0$.*

- *Si $L < 1$, alors la série $\sum a_n$ est convergente.*
- *Si $L > 1$, alors la série $\sum a_n$ est divergente.*
- *Si $L = 1$, on ne peut pas conclure à ce stade.*

Exercice 2.8. Déterminer pour quels $\alpha \geq 0$ la série

$$\sum \frac{n^{\alpha n}}{n!}$$

converge.

---

3. Séries à termes généraux

Dans cette partie nous considérons des séries $\sum u_n$ de terme général u_n ayant un signe quelconque.

3.1. **Convergence absolue.**

Définition 3.1. *Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Proposition 3.2. *Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente.*

La proposition précédente est une conséquence du critère de Cauchy pour les suites convergentes. Proposons une autre démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n^+ = \sup(u_n, 0) \quad \text{et} \quad u_n^- = \sup(-u_n, 0).$$

On remarque que (u_n^+) et (u_n^-) sont deux suites à termes positifs qui vérifient

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \quad \text{et} \quad |u_n| = u_n^+ + u_n^-, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On voit ainsi que si $\sum |u_n|$ converge, alors les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes. Cela implique alors que la série $\sum u_n = \sum(u_n^+ - u_n^-)$ est convergente.

Exemple 3.3. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

3.2. **Séries alternées.**

Définition 3.4. *Une série $\sum u_n$ est dite alternée si la suite $(-1)^n u_n$ a un signe constant* [1].

Proposition 3.5. *Soit $\sum u_n$ une suite alternée telle que*
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}| \leq |u_n|$ *(les termes généraux décroissent en valeur absolue).*
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors $\sum u_n$ est convergente et la somme de cette série est toujours encadrée par les sommes partielles successives.

3.3. **Produit de Cauchy de deux séries.** Le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Remarque 3.6. Supposons que les deux suites (a_n) et (b_n) ont un nombre fini de termes non-nuls : alors la suite (c_n) a aussi un nombre fini de termes non-nuls. Dans ce cas on peut définir les polynômes $A(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$, $B(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$ et $C(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$, et on vérifie que $A(X) = B(X)C(X)$. En évaluant cette relation en $X = 1$, on obtient $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n)(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$.

Proposition 3.7. *Supposons que les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Alors $\sum c_n$ est absolument convergente et nous avons l'égalité*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Exemple 3.8. Considérons les suites $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Dans ce cas

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

On vérifie que $\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$, pour tout $0 \leq k \leq n$. Ainsi $|c_n| \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes, tandis que $\sum c_n$ n'est pas convergente.

3.4. **Preuve de la proposition 3.7.** Supposons que les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Le sommes partielles sont notées

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad B_n = \sum_{j=0}^{n} b_j, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Par définition

$$C_n = \sum_{i+j\leq n} a_i b_j.$$

La proposition 3.7 sera démontrée si nous vérifions que $\lim_{n\to\infty}(A_n B_n - C_n) = 0$.

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ est la série de terme général

$$\mathbf{c}_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}|.$$

1. $(-1)^n u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ou bien $(-1)^n u_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Les sommes partielles correspondantes sont

$$\mathbb{A}_n = \sum_{i=0}^{n} |a_i|, \quad \mathbb{B}_n = \sum_{j=0}^{n} |b_j|, \quad \mathbb{C}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k.$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \mathbb{C}_n$. Ainsi $\sum c_n$ est absolument convergente si $\sum \mathbf{c}_n$ est convergente.

Un calcul direct montre que

$$A_n B_n - C_n = \sum_{\substack{n<i+j \\ i\leq n \text{ et } j\leq n}} a_i\, b_j$$

Ainsi

$$(\star) \qquad |A_n B_n - C_n| \leq \sum_{\substack{n<i+j \\ i\leq n \text{ et } j\leq n}} |a_i|\,|b_j| = \mathbb{A}_n\mathbb{B}_n - \mathbb{C}_n \geq 0.$$

Sachant que les suites $(\mathbb{A}_n)$ et $(\mathbb{B}_n)$ sont convergentes, l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{A}_n\mathbb{B}_n \geq \mathbb{C}_n$ montre que la suite $(\mathbb{C}_n)$ est bornée, donc convergente. A ce stade, nous savons que $\sum \mathbf{c}_n$ est convergente, donc $\sum c_n$ est absolument convergente.

Comme

$$\mathbb{C}_{2n} - \mathbb{A}_n\mathbb{B}_n = \sum_{\substack{i+j\leq 2n \\ i>n \text{ ou } j>n}} |a_i|\,|b_j| \;\geq\; 0$$

nous obtenons l'encadrement

$$\mathbb{C}_n \leq \mathbb{A}_n\mathbb{B}_n \leq \mathbb{C}_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sous-suite $(\mathbb{C}_{2n})$ admet la même limite que la suite $(\mathbb{C}_n)$. Grace à l'encadrement précédent on voit que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{A}_n\mathbb{B}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{C}_n$, et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{A}_n\mathbb{B}_n - \mathbb{C}_n = 0$.

La relation $(\star)$ permet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n B_n - C_n) = 0$.

---

4. Application à la fonction exponentielle

Le critère de d'Alembert nous permet de voir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente. Notons

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

la somme de cette série.

Proposition 4.1. • *Le produit de Cauchy des séries* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *et* $\sum \frac{y^n}{n!}$ *est la série* $\sum \frac{(x+y)^n}{n!}$.
- $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $\exp(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nous allons maintenant montrer que "exp" est une fonction de classe C^∞.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons

$$R_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

de telle manière que $\exp(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} + R_k(x)$.

Lemme 4.2. • *Pour tout* $x \in [-1, 1]$, *on a*

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{x^k}{k!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \qquad \forall n \geq k \geq 1.$$

- *Au voisinage de* 0, *on a* $R_k(x) = o(x^k)$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Le dernier point du lemme précédent nous permet de voir que la fonction “exp” admet un DL à l’ordre 1 en 0 : $\exp(x) = 1 + x + o(x)$. Cela nous permet de montrer, d’une part que “exp” est continue en 0, et d’autre part que la dérivée de “exp” en $x = 0$ est égale à 1 :

$$\exp'(0) = 1.$$

La relation fonctionnelle $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ permet de montrer facilement le fait suivant.

Proposition 4.3. *La fonction* “exp” *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et nous avons*

$$\exp'(x) = \exp(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous terminons avec la caractérisation de la fonction exponentielle (utilisée en terminale).

Théorème 4.4. *La fonction* “exp” *est l’unique solution de l’équation différentielle*

$$\begin{cases} F'(x) = F(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ F(0) = 1. \end{cases}$$