MODULE HAX201X
ANNÉE 2024/2025

Développements Limités

Table des matières

1 Fonctions de classe C^n, C^∞ **2**

2 Théorème de Taylor-Young **4**

3 Développements limités des fonctions classiques **6**
3.1 La fonction exponentielle : $\exp(x) = e^x$ 6
3.2 Les fonctions sin et cos 7
3.3 La fonction logarithme 8
3.4 Les fonctions $(1 + x)^\alpha$ 9

4 Calcul de développements limités **9**
4.1 Somme et produit de développements limités 11
4.2 Composition de développements limités 12
4.3 Intégration de développements limités 12

5 Théorème des accroissements finis **13**

6 Théorème de Taylor-Lagrange **15**
6.1 Lien entre "Taylor-Lagrange" et "Taylor-Young" 15
6.2 Preuve de la formule de Taylor-Lagrange 16

7 Premières utilisations de la formule de Taylor-Lagrange **17**
7.1 Approximation 17
7.2 DL à l'ordre n : $n \to \infty$? 18
7.2.1 La fonction exponentielle 19
7.2.2 La fonction logarithme 20
7.2.3 Les fonctions sinus et cosinus 20

8 Autres utilisations de la formule de Taylor-Lagrange **21**
8.1 Calcul des dérivées successives en un point 21
8.2 Calculs de limites de fonctions 21
8.3 Position du graphe d'une fonction par rapport à une tangente 23
8.4 Développements asymptotiques 26

9 Applications aux suites **28**
9.1 Notions : "petit o", "grand O", "équivalent" . . . 28
9.2 Développement asymptotique . . . 28
9.3 Exemples . . . 28
9.3.1 Exemple 1 . . . 28
9.3.2 Exemple 2 . . . 29
9.3.3 Exemple 3 . . . 29

1 Fonctions de classe C^n, C^∞

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

Définition 1 *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe C^0 si elle est continue.*

On rappelle que f est dite *dérivable* si pour tout $x \in I$, la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existe. Cette limite sera notée $f'(x)$. La dérivée de f est alors la fonction $f' : x \in I \mapsto f'(x)$.

Définition 2 *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, si f est dérivable et la fonction dérivée f' est continue.*

Considérons une classe d'exemples : pour un entier $n \geq 1$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les relations

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On constate que les fonctions $f_n, n \geq 1$ sont toutes continues. Considérons la question de la dérivabilité : on remarque que toutes ces fonctions sont dérivables en dehors de 0.

Pour $n = 1$, la fonction f_1 n'est pas dérivable en 0 car $\frac{f_1(h)-f_1(0)}{h} = \sin(\frac{1}{h})$ n'admet pas de limite en 0.

Si $n \geq 2$, la fonction f_n est dérivable et la fonction dérivée f_n' est définie par les relations

$$f_n'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \sin(\frac{1}{x}) - x^{n-2}\cos(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

On voit alors que f_n' est continue en 0 si et seulement si $n \geq 3$. Faisons un petit résumé :

a) f_1 n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$,

b) f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,

c) f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 3$.

Exercice 3 *Considérons une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On suppose que la limite $\lim_{x\to 0, x\neq 0} g'(x)$ existe. En déduire que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Indication : utiliser le théorème des accroissements finis.*

Introduisons maintenant la notion de fonctions de classe C^n. Cette définition se fait par récurrence sur $n \geq 1$.

Définition 4 *Soit $n \geq 1$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^n, si f est dérivable et la fonction dérivée f' est de classe C^{n-1}.*

Notons $f^{(k)}, k \in \mathbb{N}$ les dérivées successives de f, lorsqu'elles existent : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')'$, $f^{(3)} = ((f')')'$ etc.

Ainsi une fonction f est de classe C^n si elle admet des dérivées jusqu'à l'ordre n, et $f^{(n)}$ est continue.

Exercice 5 *Montrer que la fonction f_5 définie par (1) est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe C^3.*

Exercice 6 *Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^n, $g : J \to \mathbb{R}$ est de classe C^p, et que $f(I) \subset J$. Montrer que la fonction composée $g \circ f$ est de classe C^m avec $m = \inf\{n, p\}$.*

Introduisons maintenant la notion de fonctions de classe C^∞.

Définition 7 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞, si f est de classe C^n pour tout $n \geq 0$.*

Ainsi une fonction f est de classe C^∞ si elle admet des dérivées à tout ordre. Remarquons que si f est de classe C^∞, alors ses dérivées $f^{(n)}$ sont aussi de classe C^∞.

Exercice 8 *Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont de classe C^∞, et que $f(I) \subset J$. Montrer que la fonction composée $g \circ f$ est de classe C^∞.*

Voici quelques exemples de fonctions C^∞

a) les fonctions usuelles : polynômes, fractions, exp, ln, sin, cos, arcsin, arccos, arctan,

b) $x > 0 \mapsto \sin(\frac{1}{x})$,

On termine cette partie avec un exemple "non-standard" de fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 *On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les relations*

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases} \tag{2}$$

a) Expliquer pourquoi g est C^∞ sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme P_n tel que

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}, \quad \forall x > 0.$$

c) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\lim_{x\to 0, x\neq 0} g^{(n)}(x) = 0$.

d) En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Indication : on utilisera l'exercice 3.

2 Théorème de Taylor-Young

On commence avec un résultat préliminaire qui nous permettra par exemple de comprendre pourquoi $\sin(x^2) - x^2 = o(x^5)$ au voisinage de 0.

Proposition 10 *Soit $n \geq 0$. Soient $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n, et $a \in I$. On suppose que les dérivées $F^{(k)}(a)$ sont nulles pour tout $k = 0, \ldots, n$. Alors au voisinage de a, on a*

$$F(x) =_a o((x-a)^n).$$

Preuve : On va procéder par récurrence sur $n \geq 0$.

Traitons le cas $n = 0$. Si F est continue sur I et que $F(a) = 0$, on a bien $F(x) =_a o(1)$.

Supposons l'hypothèse vraie au rang n. Considérons une fonction F de classe C^{n+1} telle que $F^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n, n+1$. Alors la fonction $G := F'$ est de classe C^n et $G^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n$. Appliquons alors l'hypothèse de récurrence à la fonction G :

$$F'(x) = G(x) =_a o((x-a)^n). \tag{3}$$

Il faut maintenant montrer que cette relation, avec l'égalité $F(a) = 0$, implique que $F(x) =_a o((x-a)^{n+1})$.

L'identité (3) signifie que il existe une fonction ϵ telle que

$$F'(x) = (x-a)^n \epsilon(x), \forall x \in I,$$

et $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

Utilisons maintenant le théorème des accroissement finis : pour tout $x \neq a$, il existe $\theta_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que

$$F(x) - F(a) = F'(\theta_x) \cdot (x-a) = (\theta_x - a)^{n+1} \epsilon(\theta_x).$$

Comme $F(a) = 0$, et que $|\theta_x - a| \leq |x-a|$, on obtient

$$|F(x)| \leq |x-a|^{n+1} C_x$$

avec $C_x = \max_{t \in [a,x]} |\epsilon(t)|$.

Comme $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$, on a $\lim_{x \to a} C_x = 0$: ainsi

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

On a donc montré que $F(x) =_a o((x-a)^{n+1})$, ce qui termine la récurrence, et donc la preuve de la proposition. □

Considérons maintenant le cadre général : une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n, et $a \in I$. On définit alors le polynôme

$$P_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{n} f^k(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Calculons les dérivées successives des polynômes $\frac{(x-a)^k}{k!}$: pour tout $j, k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left(\frac{(x-a)^k}{k!}\right)^{(j)} = \begin{cases} \frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} & \text{si} \quad j \leq k, \\ 0 & \text{si} \quad j \geq k+1. \end{cases}$$

Ainsi les dérivées du polynôme $P_{f,a}$ sont

$$(P_{f,a})^{(j)}(x) := \sum_{k=j}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} \qquad \text{si} \quad j \leq n.$$

En particulier $(P_{f,a})^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ pour tout $j = 0, \cdots, n$.

On a montré que la fonction $F = f - P_{f,a}$ vérifie : $F^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n$. Si on applique la proposition 10 à la fonction F on obtient le résultat suivant.

Théorème 11 (Théorème de Taylor-Young) *Soit $n \geq 0$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n, et $a \in I$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Ici $o((x-a)^n)$ désigne une fonction de la forme $(x-a)^n\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$.

Nous introduisons maintenant la notion de développement limité.

Définition 12 *Soit $n \geq 0$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet une développement limité à l'ordre n en $a \in I$ si il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ tels que l'on ait*

$$f(x) = \sum_{k=j}^{n} \alpha_k(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

au voisinage de a.

Commençons par un résultat d'unicité.

Lemme 13 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une développement limité à l'ordre n en $a \in I$, le $n+1$-uplet de réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ est unique.*

Preuve : Supposons que l'on ait

$$f(x) = \sum_{k=j}^{n} \alpha_k(x-a)^k + o((x-a)^n), \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{k=j}^{n} \beta_k(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

En faisant la différence de ces deux égalités on obtient

$$\sum_{k=j}^{n} (\alpha_k - \beta_k)(x-a)^k = o((x-a)^n).$$

Supposons qu'il existe k tel que $\alpha_k - \beta_k \neq 0$: on définit alors $p := \min\{k, \alpha_k - \beta_k \neq 0\} \leq n$. La relation précédente s'écrit alors

$$C(x-a)^p = \sum_{k=p+1}^{n} (\beta_k - \alpha_k)(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

avec $C = \alpha_p - \beta_p \neq 0$. Si on divise cette relation par $(x-a)^p$, on obtient

$$C = \sum_{k=p+1}^{n} (\beta_k - \alpha_k)(x-a)^{k-p} + o((x-a)^{n-p}).$$

Cette dernière égalité est contradictoire car le terme de droite tend vers 0 lorsque $x \to a$. On a ainsi montré que $\alpha_k = \beta_k$, pour tout $k = 0, \cdots, n$. $\square$

Notation 14 *Pour abréger, on écrira « f admet un $DL_n(a)$ » pour « f admet une développement limité à l'ordre n en a ».*

Grâce au théorème de Taylor-Young, nous savons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n admet un $DL_n(a)$ en tout point $a \in I$. Mais une fonction peut admettre un $DL_n(a)$ sans être de classe C^n au voisinage de a (cf. exemple suivant).

Exemple 15 *On a montré à l'exercice 5 que la fonction f_5 définie par (1) est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe C^3. Néanmoins f_5 admet un $DL_4(0)$ de la forme : $f_5(x) = o(x^4)$.*

Exercice 16 *Supposons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une développement limité à l'ordre n en 0 :*

$$f(x) = \sum_{k=j}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n).$$

1. *Supposons la fonction f paire : $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha_k = 0$ si k est impair.*
2. *Supposons la fonction f impaire : $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha_k = 0$ si k est pair.*

Indication : utiliser le lemme 13.

3 Développements limités des fonctions classiques

3.1 La fonction exponentielle : $\exp(x) = e^x$

Commençcons par les DL en 0. Comme $\exp^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \geq 0$, le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle est

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \tag{4}$$

Déterminons maintenant le développement limité à l'ordre n en $a \in \mathbb{R}$ de la fonction exponentielle. Comme $\exp^{(n)}(a) = e^a$, on obtient

$$e^x = e^a \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n). \tag{5}$$

3.2 Les fonctions sin et cos

Commençons par les développements limités en 0. Les dérivées successives des fonctions sinus et cosinus sont

$$\begin{cases} (\sin)^{(2n)} = (-1)^n \sin, \\ (\sin)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\cos)^{(2n)} = (-1)^n \cos, \\ (\cos)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin. \end{cases}$$

Ainsi, en évaluant en 0, on obtient

$$\begin{cases} (\sin)^{(2n)}(0) = 0, \\ (\sin)^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\cos)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \\ (\cos)^{(2n+1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Les développements limités de la fonction sinus en 0 :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}). \tag{6}$$

Il n'y a que des puissances impaires dans (6) car sinus est une fonction impaire (cf. exercice 16).

Les développements limités de la fonction cosinus en 0 :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \tag{7}$$

Il n'y a que des puissances paires dans (7) car cosinus est une fonction paire (cf. exercice 16).

Calculons maintenant les développements limités en $a \in \mathbb{R}$. En évaluant en a, on obtient

$$\begin{cases} (\sin)^{(2n)}(a) = (-1)^n \sin(a), \\ (\sin)^{(2n+1)}(a) = (-1)^n \cos(a), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\cos)^{(2n)}(a) = (-1)^n \cos(a), \\ (\cos)^{(2n+1)}(a) = (-1)^{n+1} \sin(a). \end{cases}$$

Les développements limités de la fonction sinus en a :

$$\sin(x) = \cos(a)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-a)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(a)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-a)^{2k}}{(2k)!} + o((x-a)^{2n+1}). \quad (8)$$

On reconnait ici la formule trigonométrique : $\sin(x) = \cos(a)\sin(x-a)+\sin(a)\cos(x-a)$.

Les développements limités de la fonction cosinus en a :

$$\cos(x) = \cos(a)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-a)^{2k}}{(2k)!} - \sin(a)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(x-a)^{2k+1}}{(2k+1)!} + o((x-a)^{2n+1}). \quad (9)$$

On reconnait la formule trigonométrique : $\cos(x) = \cos(a)\cos(x-a)-\sin(a)\sin(x-a)$.

3.3 La fonction logarithme

Les dérivées successives de la fonction $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ sont

$$(\ln)^{(k)}(x) = (k-1)!\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

En évaluant en $x = 1$, on obtient : $\frac{(\ln)^{(k)}(1)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\forall k \geq 1$. Ainsi les développements limités de la fonction logarithme en 1 sont

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k + o((x-1)^n). \quad (10)$$

Si on travaille avec la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$, les développements limités en 0 sont

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + o(x^n). \quad (11)$$

En évaluant en $x = a$, on obtient : $\frac{(\ln)^{(k)}(a)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}a^{-k}$, $\forall k \geq 1$. Ainsi les développements limités de la fonction logarithme en $a > 0$ sont

$$\ln(x) = \ln(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x-a}{a}\right)^k + o((x-a)^n). \quad (12)$$

3.4 Les fonctions $(1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $(1+x)^\alpha$ est définie pour $x > -1$ par l'expression $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$. Ses développements limités en 0 sont

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \sum_{k=2}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n). \qquad (13)}$$

Considérons l'exemple fondamental où $\alpha = -1$. Le développement limité en 0 de la fonction $(1+x)^{-1}$ est :

$$\boxed{(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)}$$

Si on travaille avec la fonction $x \mapsto (1-x)^{-1}$, on obtient le $DL_n(0)$ suivant :

$$\boxed{(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)}$$

Considérons l'exemple où $\alpha = \frac{1}{2}$. Le développement limité en 0 de la fonction $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 est :

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{15}{16}x^4 + o(x^4).}$$

4 Calcul de développements limités

Les développement limités obtenus avec le théorème de Taylor-Young sont difficilement exploitables dans la pratique. Les calculs des termes $f^{(k)}(a)$ peuvent se révéler très fastidieux ! Montrons sur un exemple comment on peut procéder autrement.

Considérons la fonction $f(x) = \sin(x^3 + \sin(x))$ et cherchons son DL_6 en 0. Vous pouvez vous lancer sur le calcul des dérivées successives $f', f^{(2)}, \cdots, f^{(6)}$, mais cela va prendre du temps et les fautes de calcul risquent de faire tout capoter...

Voici une autre méthode. Le DL_6 de la fonction sinus en 0 est

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6).$$

On va utiliser une autre notation pour calculer le DL_6 de f en 0 :

$$\sin(t) = t - \tfrac{1}{3!}t^3 + \tfrac{1}{5!}t^5 + t^6\epsilon(t) \qquad (14)$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(t)=0$. On voit alors que $f(x)=\sin(x^3+\sin(x))=\sin(A(x))$ où $A(x)=x+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5+x^6\epsilon(x)$ est une fonction telle que $A(0)=0$. Si on effectue le changement de variables $t=A(x)$ dans (14), on obtient

$$f(x)=A(x)-\frac{1}{3!}A(x)^3+\frac{1}{5!}A(x)^5+(A(x))^6\epsilon(A(x)).$$

On remarque tout d'abord que $\lim_{x\to 0}\epsilon(A(x))=0$ et que $\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{x}=1$; donc $(A(x))^6\epsilon(A(x))=o(x^6)$ au voisinage de 0.

Calculons le DL_6 de la fonction $A(x)^3$ en 0 :

$$\begin{array}{rcl} A(x)^3 & = & \left(x+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^6\epsilon(x)\right)^3 \\ & = & x^3\left(1+\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+x^5\epsilon(x)\right)^3 \\ & = & x^3\left(1+\frac{5}{6}x^2+o(x^3)\right)^3 \\ & = & x^3\left(1+\frac{5}{2}x^2+o(x^3)\right) \qquad [1] \\ & = & x^3+\frac{5}{6}x^5+o(x^6) \end{array}$$

Pour l'égalité [1], on a utilisé le développement de la puissance :

$$\begin{array}{rcl} (1+\frac{5}{6}x^2+o(x^3))^3 & = & 1+3(\frac{5}{6}x^2+o(x^3))+3(\frac{5}{6}x^2+o(x^3))^2+(\frac{5}{6}x^2+o(x^3))^3 \\ & = & 1+\frac{5}{2}x^2+o(x^3) \end{array}$$

Calculons le DL_6 de la fonction $A(x)^5$ en 0 :

$$\begin{array}{rcl} A(x)^5 & = & \left(x+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^6\epsilon(x)\right)^5 \\ & = & x^5\left(1+\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+x^5\epsilon(x)\right)^5 \\ & = & x^5\left(1+o(x)\right)^5 \\ & = & x^5\left(1+o(x)\right) \\ & = & x^5+o(x^6) \end{array}$$

Finalement on a

$$f(x)=\left(x+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^6)\right)-\frac{1}{3!}\left(x^3+\frac{5}{2}x^5+o(x^6)\right)+\frac{1}{5!}\left(x^5+o(x^6)\right)+o(x^6)$$

En regroupant les termes, on obtient le DL_6 de la fonction f en 0 :

$$\boxed{f(x)=x+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{5}x^5+o(x^6).}$$

Dans les prochaines sections, nous allons passer en revue toutes les manipulations que l'on a utilisées dans l'exemple précédent. On se placera dans le cas de développements limités en 0. La même chose marche (bien sûr) avec des développements limités en $a\neq 0$.

4.1 Somme et produit de développements limités

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $0 \in I$. On suppose :

— f admet un $DL_n(0)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$,

— g admet un $DL_p(0)$: $g(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + o(x^p)$.

Proposition 17 *Soit $m = \inf\{n, p\}$. Alors $f + g$ admet un $DL_m(0)$:*

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) x^k + o(x^m).$$

Preuve : On utilise que $x^k = o(x^m)$ si $k > m$, et que si $r_1(x) = o(x^n)$ et $r_2(x) = o(x^p)$, alors $r_1(x) + r_2(x) = o(x^m)$. □

Calculons maintenant le DL du produit des fonctions fg. Pour cela on considère les polynômes $P_f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $P_g(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$. Effectuons le produit $P_f P_g$:

$$\begin{aligned} P_f P_g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{p} b_j x^j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{np} c_k x^k \end{aligned}$$

où les coefficients c_k sont déterminés par les relations

$$c_k = \sum_{\substack{0 \le i \le n, 0 \le j \le p \\ i+j=k}} a_i b_j.$$

Proposition 18 *Soit $m = \inf\{n, p\}$. Alors le produit fg admet un $DL_m(0)$:*

$$fg(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k + o(x^m).$$

Preuve : On utilise que $x^k = o(x^m)$ si $k > m$, et que si $r_1(x) = o(x^n)$ et $r_2(x) = o(x^p)$, alors $P_f(x) r_2(x) + P_g(x) r_1(x) = o(x^m)$. □

Dans certains cas on peut obtenir un DL du produit fg à un ordre $m' > m$. Expliquons cela sur un exemple. Supposons que

— $F(x) = \pi x - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$,

— $G(x) = 5x^2 - 7x^4 + o(x^4)$.

Si on applique le résultat de la proposition précédente, on obtient un $DL_3(0)$ pour FG : $FG(x) = 5\pi x^3 + o(x^3)$.

En fait ce n'est pas difficile d'obtenir un DL de FG à un ordre supérieur. Il suffit de factoriser le terme x dans $F(x)$ et le terme x^2 dans $G(x)$:

$$\begin{aligned} FG(x) &= x^3 \left(\pi - 2x + x^2 + o(x^2)\right)\left(5 - 7x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x^3 (5\pi - 10x + (5 - 7\pi)x^2 + o(x^2)) \\ &= 5\pi x^3 - 10x^4 + (5 - 7\pi)x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

4.2 Composition de développements limités

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de 0. Ici on suppose que $g(0) = 0$, ainsi la fonction composée $f \circ g(x)$ a un sens pour x suffisamment proche de 0.

On suppose de plus l'existence de DL :

— f admet un $DL_n(0)$: $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + o(x^n)$,

— g admet un $DL_p(0)$: $g(x) = \sum_{j=1}^p b_j x^j + o(x^p)$.

Remarquez que le DL de g ne contient pas de termes constant (la somme commence à $k = 1$) car $g(0) = 0$.

Proposition 19 *Soit $m = \inf\{n, p\}$. Alors $f \circ g$ admet un $DL_m(0)$:*

$$f \circ g(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^k + o(x^m).$$

Mais il n'y pas de formules simples pour les constantes α_k :

— $\alpha_0 = a_0$,

— $\alpha_1 = a_1 b_1$,

— $\alpha_2 = a_1 b_2 + a_2 (b_1)^2$,

— $\alpha_3 = a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 (b_1)^3$,

— $\cdots$

Preuve : on procède comme dans l'exemple. On pose $f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i + t^n \epsilon(t)$ avec $\lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$. En faisant le changement de variables $t = g(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j + o(x^m)$ on obtient

$$f \circ g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\sum_{j=1}^{m} b_j x^j + o(x^m))^i + (g(x))^n \epsilon(g(x)).$$

On vérifie que $(g(x))^n \epsilon(g(x)) = o(x^n)$ et donc $(g(x))^n \epsilon(g(x)) = o(x^m)$ car $m \leq n$.

Chaque terme $(\sum_{j=1}^m b_j x^j + o(x^m))^i$ est un produit de $DL_m(0)$: d'après la section précédente, on sait que ce produit va nous fournir un $DL_m(0)$. Ensuite, il suffira de faire la somme de ces DL (multipliés par a_i) pour obtenir un $DL_m(0)$ pour la fonction $f \circ g$. □

4.3 Intégration de développements limités

Voici une autre technique pour manipuler les DL. Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $a \in I$.

Proposition 20 *Supposons que la dérivée f' admette un $DL_n(a)$ de la forme*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Alors la fonction f admet un $DL_{n+1}(a)$ qui est égal à

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Preuve : Ecrivons $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Comme f est de classe C^1, on a l'identité

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)dt \\ &= f(a) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^x (t-a)^{k+1} dt + \int_a^x (t-a)^n \epsilon(t) dt. \end{aligned}$$

pour tout $x \in I$. On voit que $\int_a^x (t-a)^{k+1} dt = \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$. Un calcul élémentaire montre d'autre part que $\int_a^x (t-a)^n \epsilon(t) dt = o((x-a)^{n+1})$. $\square$

Exemple 21 *En 0, on considère les DL de la forme $(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. Si on intègre cette relation sur l'intervalle $[0,x] \subset]-\infty, 1[$ on obtient $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1})$.*

Remarque 22 *La fonction*

$$f_3(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

est de classe C^1, et elle admet un $DL_2(0)$: $f_3(x) = o(x^2)$. Par contre, la fonction dérivée f_3' n'admet pas de $DL_1(0)$!

5 Théorème des accroissements finis

Le théorème de Taylor-Young nous assure l'existence de développements limités. Rappelons son énoncé. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^n, et $a \in I$, alors au voisinage de a nous avons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + R_n^a(x),$$

où $R_n^a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant $R_n^a(x) =_a o((x-a)^n)$.

Le théorème de Taylor-Lagrange (que nous aborderons dans la prochaine section) nous donnera de nouvelles informations sur ces fonctions $R_n^a(x)$.

Ici, nous nous restreignons au cas $n = 0$. Considérons une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, qui est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Nous commençons avec le lemme de Rolle.

Lemme 23 *Supposons que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $\theta \in]a, b[$, tel que $f'(\theta) = 0$.*

Preuve : On travaille avec la fonction $g(x) = (f(x) - f(a))^2$ qui prend des valeurs positives. Comme g est continue, il existe $\theta \in [a, b]$ tel que $g(\theta) = \sup_{t\in[a,b]} g(t)$. Si $g(\theta) = 0$, alors $f(t) = f(a)$ pour tout $t \in [a, b]$ et le lemme est démontré. Supposons que $g(\theta) > 0$, alors $\theta \in]a, b[$ car $g(a) = g(b) = 0$. On remarque alors que $\frac{g(x)-g(\theta)}{x-\theta} \leq 0$ si $x \in]\theta, b]$ et $\frac{g(x)-g(\theta)}{x-\theta} \geq 0$ si $x \in [a, \theta[$. Cela implique que la limite

$$g'(\theta) = \lim_{x\to\theta} \frac{g(x) - g(\theta)}{x - \theta}$$

est nulle. Comme $g'(\theta) = 2g(\theta)f'(\theta)$ et que $g(\theta) \neq 0$, on obtient $f'(\theta) = 0$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème des accroissements finis.

Théorème 24 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $\theta \in]a, b[$, tel que*

$$f'(\theta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve : On considère la fonction $F_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par la relation

$$F_0(x) = f(x) - f(b) + (b - x)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On remarque que F_0 est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. De plus $F_0(a) = F_0(b) = 0$. Ainsi, on peut appliquer le lemme précédent à la fonction F_0 : il existe $\theta \in]a, b[$, tel que $F_0'(\theta) = 0$. Comme $F_0'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, le théorème est démontré. □

Voyons le rapport entre le théorème des accroissements finis et les développements limités à l'ordre 0. Pour cela, considérons une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I. Pour tout $a \in I$, on a

$$f(x) = f(a) + R_0^a(x), \quad \text{avec} \quad R_0^a(x) =_a o(1) \tag{15}$$

Si f est dérivable sur I, alors pour tout $x \in I, x \neq a$, il existe $\theta \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que $f'(\theta) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On voit alors que

$$\forall x \in I,\ \exists \theta \in]a, x[\text{ (ou }]x, a[), \quad R_0^a(x) = f'(\theta)(x - a). \tag{16}$$

L'expression (16) permet d'exprimer la fonction R_0^a au moyen de la dérivée f'.

Terminons cette section avec quelques remarques :

— Si on suppose seulement que f est dérivable, l'expression (16) ne permet pas de montrer que $R_0^a(x) =_a o(1)$.

— Si f est de classe C^1, l'expression (16) permet de voir que $R_0^a(x) =_a O((x - a))$, car la dérivée f' est bornée au voisinage de a.

— Si f est de classe C^1, le développement de Taylor-Young donne

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o((x - a)).$$

C'est à dire $R_0^a(x) = f'(a)(x - a) + o((x - a))$. Cette expression permet aussi de voir que $R_0^a(x) =_a O((x - a))$.

6 Théorème de Taylor-Lagrange

Enonçons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n \geq 0$.

Théorème 25 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et $a, b \in I$ ($b > a$). Supposons de plus que f est $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors il existe $\theta \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\theta)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si on utilise le signe $\sum$, l'identité précédente prend la forme suivante

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(\theta)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{17}$$

Remarque 26 *La relation (17) est encore valable si on interchange les rôles de a et b. Il existe $\theta' \in]a, b[$ tel que*

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(b)\frac{(a-b)^k}{k!} + f^{(n+1)}(\theta')\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{18}$$

6.1 Lien entre "Taylor-Lagrange" et "Taylor-Young"

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n et $a \in I$. D'après Taylor-Young nous avons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + R_n^a(x),$$

où $R_n^a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant $R_n^a(x) =_a o((x-a)^n)$.

Supposons maintenant que f soit $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle I. La formule de Taylor-Lagrange nous assure que $\forall x \in I$, $\exists \theta \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que

$$R_n^a(x) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{19}$$

Comme à la section 5, voici quelques remarques pour clore la comparaison.

- Si on suppose seulement que f est $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle I, l'expression (19) ne permet pas de montrer que $R_n^a(x) =_a o((x-a)^n)$.
- Si f est de classe C^{n+1}, l'expression (19) implique que $R_n^a(x) =_a O((x-a)^{n+1})$, car la dérivée f^{n+1} est bornée au voisinage de a.
- Si f est de classe C^{n+1}, le développement de Taylor-Young à l'ordre $n+1$ montre que
$$R_n^a(x)) = f^{(n+1)}(a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + o((x-a)^{n+1}),$$
ce qui permet aussi de voir que $R_n^a(x) =_a O((x-a)^{n+1})$.

6.2 Preuve de la formule de Taylor-Lagrange

On adopte la même démarche que dans la preuve du théorème des accroissements finis. On définit les fonctions

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} - f(b)$$

et

$$F_n(x) = S_n(x) - S_n(a)\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}.$$

Ces deux fonctions sont dérivables car on a supposé que f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $(n+1)$. De plus, lorsque l'on évalue S_n en a on obtient

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} - S_n(a).$$

Ainsi, la formule de Taylor-Lagrange est démontrée si on vérifie qu'il existe $\theta \in]a,b[$ tel que $-S_n(a) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Remarque 27 *Lorsque* $n=0$*, on voit que* $F_0(x) = f(x) - f(b) + (b-x)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$*. Cette fonction a été utilisé dans la preuve du théorème des accroissements finis.*

Comme $S_n(x) = f(x) - f(b) + f'(x)(b-x) + f''(x)\frac{(b-x)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}$, on voit que $S_n(b) = 0$ et donc $F_n(b) = S_n(b) - S_n(a)\frac{(b-b)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} = 0$. D'autre part $F_n(a) = S_n(a) - S_n(a)\frac{(b-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} = 0$.

Comme $F_n(a) = F_n(b) = 0$, et que F_n est dérivable, on peut appliquer le lemme de Rolle : il existe $\theta \in]a,b[$ tel que

$$F_n'(\theta) = 0.$$

Calculons maintenant les dérivées des fonctions S_n et F_n.

Lemme 28 *On a*

$$S_n'(x) = f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!},$$

et

$$F_n'(x) = f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!} + (n+1)S_n(a)\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

Preuve : L'expression (simple) de la dérivée de S_n provient d'un phénomène de télescopage que l'on peut résumer de la manière suivante : pour tout réels $\alpha_k, \beta_k, k \in \{0,\ldots,n+1\}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k+1}\beta_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_{k-1} = \alpha_{n+1}\beta_n.$$

Ainsi

$$S'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} - \sum_{j=1}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} = f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Ici on a utilisé le fait que la dérivée de $\frac{(b-x)^k}{k!}$ est égale à $-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}$.

Comme $F_n(x) = S_n(x) - S_n(a)\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}$, on a $F'_n(x) = S'_n(x) + (n+1)S_n(a)\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$. Cela termine la preuve du Lemme. □

On voit maintenant que l'égalité $F'_n(\theta) = 0$ est équivalente à

$$f^{(n+1)}(\theta)\frac{(b-\theta)^n}{n!} + (n+1)S_n(a)\frac{(b-\theta)^n}{(b-a)^{n+1}} = 0.$$

Comme $b - \theta \neq 0$, on obtient la relation souhaitée : $-S_n(a) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. □

7 Premières utilisations de la formule de Taylor-Lagrange

7.1 Approximation

Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Supposons que l'on connaisse une valeur $f(a)$. Une question naturelle est alors d'approximer la quantité $f(a+\epsilon)$ lorsque ϵ est assez petit. Pour cela on utilise la formule de Taylor-Lagrange, on a

$$f(a+\epsilon) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{\epsilon^k}{k!} + R_n^a(\epsilon)$$

où $\forall \epsilon$, $\exists \epsilon' \in [0, \epsilon]$ (ou $[\epsilon, 0]$) tel que

$$R_n^a(\epsilon) = f^{(n+1)}(a+\epsilon')\frac{\epsilon^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il est alors naturel d'approximer $f(a+\epsilon)$ par la quantité $\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{\epsilon^k}{k!}$. Pour connaitre la qualité de cette approximation il faut majorer le terme d'erreur $R_n^a(\epsilon)$. Expliquons la démarche sur un exemple.

Approximer $\sin(10^{-1})$ à 10^{-10} près.

La formule de Taylor-Lagrange de la fonction sinus en 0 à l'ordre $2n+2$ donne

$$\sin(\epsilon) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\epsilon^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+2}(\epsilon),$$

où $\forall \epsilon > 0$, $\exists \epsilon' \in [0, \epsilon]$ tel que

$$R_{2n+2}(\epsilon) = (\sin)^{(2n+3)}(\epsilon')\frac{\epsilon^{2n+3}}{(2n+3)!} = (-1)^{n+1}\cos(\epsilon')\frac{\epsilon^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Si on travaille avec $\epsilon = 10^{-1}$, on constate que $|R_{2n+2}(10^{-1})| \leq \frac{10^{-2n-3}}{(2n+3)!}$.

Choisissons $n = 2$.

— Alors $|R_6(10^{-1})| \leq \frac{10^{-7}}{7!} < \frac{1}{2}10^{-10}$.

— Le nombre rationnel $A := \sum_{k=0}^{2}(-1)^k \frac{10^{-2k-1}}{(2k+1)!} = 10^{-1} - \frac{10^{-3}}{6} + \frac{10^{-5}}{120}$ admet le développement décimal suivant

$$A = 0,0998334166666\ldots$$

Ainsi $A = 0,0998334167 + r$ avec $|r| < \frac{1}{2}10^{-10}$.

Conclusion : $\sin(10^{-1}) = 0,0998334167$ à 10^{-10} près.

7.2 DL à l'ordre n : $n \to \infty$?

Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Soit $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité de Taylor-Lagrange de f en a à l'ordre n est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n)$$

Posons

$$R_n^a(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Pour n fixé on sait donc que

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n^a(f)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Une question naturelle est de fixer $x \in I$ et de s'intéresser au comportement de la suite $n \mapsto R_n^a(f)(x)$ lorsque $n \to \infty$. Pour cela on va utiliser la formule de Taylor-Lagrange : $\forall x \in I$, il existe $\theta \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que

$$R_n^a(f)(x) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi

$$|R_n^a(f)(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[a,x]}|f^{(n+1)}(t)|.$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 29 *Supposons que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}}{n+1!}\sup_{t\in[a,x]}|f^{(n+1)}(t)| = 0 \tag{20}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} = f(x). \tag{21}$$

Notation 30 *Si la suite* $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ *converge, sa limite est notée* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$. *Ainsi, dans le cas où (21) est valable, on note*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Donnons maintenant deux critères qui nous permettent de conclure $f(x)$ est égal à la limite $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$.

Proposition 31 *La convergence (20) a lieu dans les deux cas suivants :*
- *la suite* $n \mapsto \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n)}(t)|$ *est bornée,*
- $|x-a| < 1$ *et la suite* $n \mapsto \frac{1}{n!} \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n)}(t)|$ *est bornée.*

Preuve : Pour le premier cas, il suffit d'utiliser le fait [1] que pour tout $R \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \to \infty} \frac{R^n}{n!} = 0$. Dans le deuxième cas, on utilise que $\lim_{n \to \infty} |x-a|^n = 0$ si $|x-a| < 1$. □

Avant de considérer le cas des fonctions classiques exp, ln, cos, sin, donnons un exemple où la limite (21) n'est pas valable.

Dans le cours précédent, on avait introduit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par les relations

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

On a montré que g est une fonction C^{∞} et que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on travaille avec $a = 0$, on voit que tous les termes de la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$ sont nuls, donc $\sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = 0 \neq g(x)$ si $x > 0$.

7.2.1 La fonction exponentielle

Le développement limité de Taylor-Lagrange de exp en 0 à l'ordre n montre que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x),$$

avec $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|t| \leq |x|} |\exp^{(n+1)}(t)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. On voit que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a ainsi montré que

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{22}$$

1. Poser $u_n = \frac{R^n}{n!}$ et remarquer que $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. On peut alors utiliser l'exercice 11 de la feuille 2 pour conclure que $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

7.2.2 La fonction logarithme

La dérivée $(n+1)$-ième de la fonction $\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ est

$$\ln^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad x > 0.$$

Le développement limité de Taylor-Lagrange de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre n est

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x).$$

Considérons d'abord le cas où $x \geq 0$. Alors

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[0,x]} |\ln^{(n+1)}(1+t)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, si $x \in [0,1]$.

Considérons maintenant le cas où $x \in]-1,0]$. Alors

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[x,0]} |\ln^{(n+1)}(1+t)| \leq \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \frac{1}{n+1}.$$

On voit que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, si $\frac{|x|}{1-|x|} \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$.

On vient de montrer que

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \qquad \forall x \in [\tfrac{-1}{2}, 1].} \tag{23}$$

On pourrait montrer (avec une autre méthode) que l'égalité précédente est valable pour $x \in]-1,1]$. Remarquons que (23) donne en particulier la relation

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

7.2.3 Les fonctions sinus et cosinus

Si $f = \cos$ ou $f = \sin$, on voit que la suite $n \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(t)|$ est bornée par 1. On peut utiliser le critère de la proposition 31 pour conclure que :

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{24}$$

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{25}$$

8 Autres utilisations de la formule de Taylor-Lagrange

8.1 Calcul des dérivées successives en un point

Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Supposons que l'on ait calculé le $DL_n(a)$ de f :

$$f(x) = f(a) + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Alors le DL de Taylor-Young nous permet de conclure que

$$\boxed{f^{(k)}(a) = k!\,\alpha_k, \qquad (26)}$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Exemple : Calculons les dérivées $F^{(k)}(0)$ de la fonction $F(x) = x^4\cos(x^3)$ pour $1 \leq k \leq 20$.

Ici, on ne va pas commencer à calculer les fonctions dérivées $F^{(k)}(x)$ pour $1 \leq k \leq 20$! ! On va juste calculer le $DL_{20}(0)$ de la fonction F. Le $DL_6(0)$ de la fonction $\cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$$

Alors

$$\cos(x^3) = 1 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{4!}x^{12} - \tfrac{1}{6!}x^{18} + o(x^{18})$$

En multipliant la dernière égalité par x^4, on obtient le $DL_{20}(0)$ de la fonction F :

$$F(x) = x^4 - \tfrac{1}{2}x^{10} + \tfrac{1}{4!}x^{16} + o(x^{20}).$$

Conclusion : pour $1 \leq k \leq 20$, on a

— $F^{(k)}(0) = 0$ si $k \notin \{4, 10, 16\}$,
— $F^{(4)}(0) = 4!$,
— $F^{(10)}(0) = -\frac{10!}{2}$,
— $F^{(16)}(0) = \frac{16!}{4!}$.

8.2 Calculs de limites de fonctions

Traitons quelques exemples.

Exemple 1 : Calculons la limite de $F(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$ lorsque x tend vers 0.

Nous voyons que nous avons une forme indéterminée car $\lim_{x\to 0}\sqrt{4+x^2} - 2 = 0$ et $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^2} - 1 = 0$. Nous allons lever l'indétermination en effectuant un DL(0) de chaque terme. Nous avons

$$\sqrt{4+x^2} = 2 + \tfrac{1}{4}x^2 + o(x^2) = 2 + x^2\left(\tfrac{1}{4} + o(1)\right)$$

et

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x^2\left(\tfrac{1}{2} + o(1)\right)$$

Ainsi, on voisinage de 0, nous avons

$$F(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{4} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)}$$

Conclusion : $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Exemple 2 : Calculons la limite de $G(x) = \sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+3x^2+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On voit que $\sqrt{x^2+2x} = x\sqrt{1+\frac{2}{x}} \sim_{+\infty} x$ et de même $\sqrt[3]{x^3+3x^2+1} = x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}}$ est équivalent à x en $+\infty$. Nous avons une forme indéterminée car chaque terme a le même équivalent en $+\infty$.

Pour avoir un résultat plus précis, utilisons des DL. Pour cela on remarque que pour $x > 0$, on

$$\sqrt{x^2+2x} = x\, g(\tfrac{1}{x}), \quad \text{avec} \quad g(t) = \sqrt{1+2t}$$

et

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+1} = x\, h(\tfrac{1}{x}), \quad \text{avec} \quad h(t) = \sqrt[3]{1+3t+t^3}.$$

Calculons le DL(0) à l'ordre 1 des fonctions g et h :

$$\sqrt{1+2t} = 1 + t + o(t), \quad \text{et,} \quad \sqrt[3]{1+3t+t^3} = 1 + t + o(t)$$

Alors $g(t) - h(t) =_0 o(t)$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$G(x) = x\left(g(\tfrac{1}{x}) - h(\tfrac{1}{x})\right) = x\, o(\tfrac{1}{x}) = o(1)$$

lorsque $x \to +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

Exemple 2 bis : Calculons la limite de $xG(x) = x\left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+3x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Nous avons une forme indéterminée. Pour la lever, calculons les DL(0) des fonctions g et h à l'ordre 2 :

$$g(t) = \sqrt{1+2t} = 1 + t - \tfrac{1}{2}t^2 + o(t^2) \quad \text{et} \quad h(t) = \sqrt[3]{1+3t+t^3} = 1 + t - \tfrac{2}{3}t^2 + o(t^2)$$

Alors $g(t) - h(t) = \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)$. En effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$xG(x) = x^2\left(g(\tfrac{1}{x}) - h(\tfrac{1}{x})\right) = x^2\left(\tfrac{1}{6}\tfrac{1}{x^2} + o(\tfrac{1}{x^2})\right) = \tfrac{1}{6} + o(1)$$

lorsque $x \to +\infty$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} xG(x) = \frac{1}{6}$.

Exemple 3 : Soient $a, b > 0$. Calculons la limite de $H(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers 0.

On remarque que $H(x) = \exp(\frac{1}{x}f(x))$, avec

$$f(x) = \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right).$$

Nous avons une forme indéterminée, car $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to0} f(x) = \ln(1) = 0$.

Calculons le DL_1 de f en 0. Nous avons $a^x = e^{x\ln(a)} = 1 + x\ln(a) + o(x)$ et $b^x = 1 + x\ln(b) + o(x)$ en 0, ainsi

$$f(x) = \ln(1 + \theta x + o(x))$$

avec $\theta = \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$. Si nous utilisons le DL_1 de $\ln(1+t)$ en 0, $\ln(1+t) = t + o(t)$, nous obtenons

$$f(x) = \theta x + o(x)$$

lorsque $x \to 0$. Finalement $\frac{1}{x}f(x) = \theta + o(1)$ tend vers θ lorsque $x \to 0$.

Conclusion : $\lim_{x\to0} H(x) = \exp(\theta) = \sqrt{ab}$.

8.3 Position du graphe d'une fonction par rapport à une tangente

Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini de la manière suivante :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in I, y = f(x)\}.$$

Soit $a \in I$. Considérons la droite tangente $\mathcal{D}_a$ au graphe Γ_f au point $(a, f(a))$:

$$\mathcal{D}_a \ : \qquad y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

On s'intéresse à la position de la droite $\mathcal{D}_a$ par rapport au graphe Γ_f au voisinage de $(a, f(a))$.

Définition 32

— *On dit que la droite $\mathcal{D}_a$ est* au dessus *du graphe Γ_f au voisinage de $(a, f(a))$ si il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset I$ et pour tout $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$, on a*

$$f'(a)(x-a) + f(a) \geq f(x).$$

— *On dit que la droite $\mathcal{D}_a$ est* en dessous *du graphe Γ_f au voisinage de $(a, f(a))$ si il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset I$ et pour tout $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$, on a*

$$f'(a)(x-a) + f(a) \leq f(x).$$

Le $DL_2(a)$ de f nous permet d'avoir ce premier résultat.

Proposition 33 — *Si* $f''(a) < 0$, *la droite* $\mathcal{D}_a$ *est* au dessus *du graphe* Γ_f *au voisinage de* $(a, f(a))$.
— *Si* $f''(a) > 0$, *la droite* $\mathcal{D}_a$ *est* en dessous *du graphe* Γ_f *au voisinage de* $(a, f(a))$.

Preuve : Ecrivons le $DL_2(a)$ de f :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + (x-a)^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0.$$

Si $f''(a) \neq 0$, le terme $f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a)\Big) = (x-a)^2(\frac{f''(a)}{2} + \epsilon(x))$ a le même signe que $\frac{f''(a)}{2}$ si x est suffisamment proche de a. $\square$.

Un cas particulier est intéressant : celui d'un **point d'inflexion**. Considérons le cas où $f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) \neq 0$. Dans ce cas, le DL_3 de f en a donne que

$$f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a)\Big) = (x-a)^3 \left(\frac{f^{(3)}(a)}{3!} + \epsilon(x)\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0.$$

Comme précédemment, le terme $\frac{f^{(3)}(a)}{3!} + \epsilon(x)$ garde un signe constant si x est suffisamment proche de a. Par contre $(x-a)^3$ change de signe en a.

La quantité $f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a)\Big)$ change de signe en a : pour cette raison, on dit que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion du graphe de f.

Exemple 34 *Considérons la fonction* $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$. *Voir la figure 1.*
— $f''(0) < 0$ *: la droite tangente* $\mathcal{D}_0$ *est* au dessus *du graphe* Γ_f *au voisinage de* $(0, 3)$.
— $f''(3) > 0$ *: la droite tangente* $\mathcal{D}_3$ *est* en dessous *du graphe* Γ_f *au voisinage de* $(3, -3)$.
— $f''(1) = 0$ *et* $f^{(3)}(1) = 6$ *:* $(1, -1)$ *est un point d'inflexion du graphe* Γ_f.

Dans certaines situations (très particulières), la droite tangente en un point du graphe n'est ni en dessous, ni en dessus ...

Exemple 35 *Considérons la fonction* $f(x) = x + \sin(\frac{1}{x})\, e^{-\frac{1}{x^2}}$ *si* $x \neq 0$, *et* $f(0) = 0$.
— f *est* C^∞.
— *La droite tangente en* $(0, 0)$ *:* $y = x$.
— *L'expression* $f(x) - x$ *change de signe une infinité de fois au voisinage de* 0 *!*

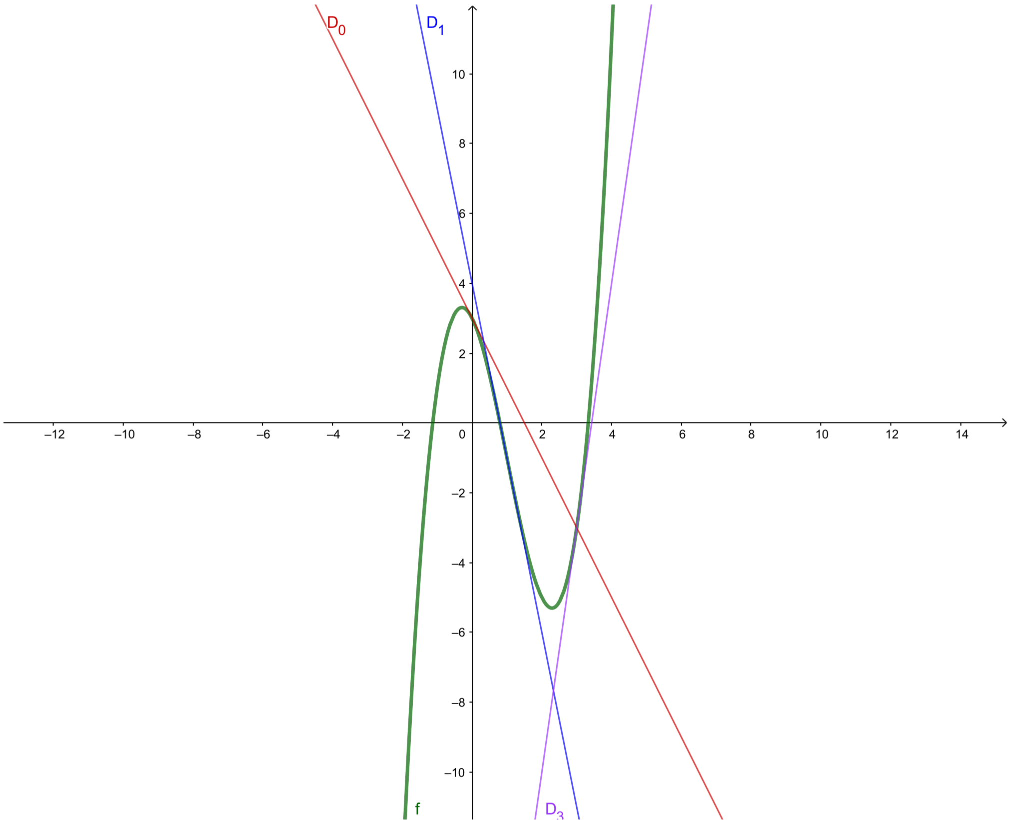

FIGURE 1: Graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

8.4 Développements asymptotiques

Les premiers exemples de développements asymptotiques sont les développements limités. Rappelons le contexte.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la famille de polynômes $(x-a)^n, n \in \mathbb{N}$. Au voisinage de a, ils sont facilement comparables :

— $(x-a)^1 =_a o((x-a)^0) = o(1)$

— $(x-a)^2 =_a o((x-a)^1)$

— $(x-a)^3 =_a o((x-a)^2)$

— $(x-a)^4 =_a o((x-a)^3)$

— ...

En d'autre termes, $(x-a)^{k+1} =_a o((x-a)^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Un $DL_n(a)$ d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une approximation de f au moyen ce cette famille $(x-a)^n, n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Nous allons généraliser ce point de vue de la manière suivante. On fixe $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ et on considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a.

Définition 36 *Un développement asymptotique de f au voisinage de a est une décomposition de la forme*

$$f(x) = v_0(x) + v_1(x) + \cdots + v_p(x) + o(v_p(x)) \tag{27}$$

où les fonctions v_k sont définies au voisinage de a et

$$v_{k+1}(x) =_a o(v_k(x)) \tag{28}$$

pour tout $k = 0, \ldots, p-1$.

La décomposition (27) et les conditions (28) signifient que :

— $f \sim_a v_0$,

— $f - v_0 \sim_a v_1$,

— $f - (v_0 + v_1) \sim_a v_2$,

— ...

— $f - (v_0 + v_1 + \cdots + v_{p-1}) \sim_a v_p$.

Un premier exemple intéressant est le cas où $a = +\infty$. La famille suivante satisfait les conditions (28) :

$$v_k(x) = \frac{1}{x^k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ici la famille est paramétrée par $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$.

Considérons un premier exemple. Calculons des développements asymptotiques de la fonction $F(x) = \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$ en $+\infty$. La factorisation $F(x) = x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}}$ donne

$$F(x) = x^2 + o(x^2)$$

lorsque $x \to +\infty$.

Pour aller plus loin, il faut considérer la fonction auxilliaire $g(t) = \sqrt{1+t+t^4}$. Comme $F(x) = x^2 g(\frac{1}{x})$, les DL de g en 0 donneront des développements asymptotiques de la fonction F en $+\infty$. Par exemple, le $DL_3(0)$ de la fonction g est

$$g(t) = 1 + \tfrac{t}{2} - \tfrac{t^2}{8} + \tfrac{t^3}{16} + o(t^3).$$

Cela implique que $F(x) = x^2\Big(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o(\frac{1}{x^3})\Big)$, soit

$$F(x) = x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16}x^{-1} + o(x^{-1})$$

lorsque $x \to +\infty$.

Considérons un second exemple. Calculons des développements asymptotiques de la fonction $G(x) = \sqrt{x^3+x+1}$ en $+\infty$.

On procède comme précédemment. On a $G(x) = x^{\frac{3}{2}} h(\frac{1}{x})$, où $h(t) = \sqrt{1+t^2+t^3}$. Le $DL_3(0)$ de la fonction h est $h(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + o(t^3)$. Ainsi $G(x) = x^{\frac{3}{2}}\Big(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o(\frac{1}{x^3})\Big)$, soit

$$G(x) = x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + o(x^{-\frac{3}{2}}).$$

lorsque $x \to +\infty$.

On voit que les familles de fonctions $(v_k(x))$ qui interviennent dans les développements asymptotiques des fonctions F et G en $+\infty$ ne sont pas les mêmes !

Considérons un troisième exemple. Calculons des développements asymptotiques de la fonction $H(x) = \ln(e^{2x} - e^x)$ en $+\infty$.

Ici on utilise le fait que $H(x) = \ln(e^{2x}(1-e^{-x})) = 2x + \ln(1-e^{-x})$. Utilisons la fonction auxilliaire $\ln(1-t)$: son DL_n en 0 est $\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}t^k + o(t^n)$. On effectue le changement de variable $t = e^{-x}$; notez que e^{-x} tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$. On obtient pour tout $n \geq 1$, le développement asymptotique

$$H(x) = 2x - e^{-x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x} - \cdots - \tfrac{1}{n}e^{-nx} + o(e^{-nx}).$$

lorsque $x \to +\infty$.

Considérons un dernier exemple. Calculons un développement asymptotique de la fonction $T(x) = \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$ en 0.

On écrit $T(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta(\sqrt{x})$ où $\theta(t) = \frac{t}{\sin(t)} - 1$. Calculons le $DL_4(0)$ de la fonction θ.

On sait que $\sin(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5)$ en 0, donc $\frac{\sin(t)}{t} = 1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 + o(t^4)$. Alors

$$\begin{aligned}\theta(t) = \frac{t}{\sin(t)} - 1 = \frac{1}{1 - (\frac{t^2}{3!} - \frac{t^4}{5!} + o(t^4))} - 1 &= (\tfrac{t^2}{3!} - \tfrac{t^4}{5!} + o(t^4)) + (\tfrac{t^2}{3!} - \tfrac{t^4}{5!} + o(t^4))^2 + o(t^4) \\ &= \tfrac{1}{6}t^2 + \tfrac{7}{360}t^4 + o(t^4).\end{aligned}$$

lorsque $t \to 0$. Après avoir fait le changement de variable $t = \sqrt{x}$, on obtient un développement asymptotique de la fonction $T(x)$ en 0 :

$$T(x) = \tfrac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{7}{360}x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}}), \quad x > 0.$$

9 Applications aux suites

On reprend les notions vues dans le cadre des fonctions et on les adapte facilement aux suites.

9.1 Notions : "petit o", "grand O", "équivalent"

Définition 37 *Soient* (a_n) *et* (b_n) *deux suites réelles.*

- $a_n = o(b_n)$, *si à partir d'un certain rang on a :* $a_n = b_n \epsilon_n$ *avec* $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.
- $a_n = O(b_n)$, *si à partir d'un certain rang on a :* $a_n = b_n \delta_n$ *où* (δ_n) *est une suite bornée.*
- $a_n \sim b_n$, *si à partir d'un certain rang on a :* $a_n = b_n \rho_n$ *avec* $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 1$.

9.2 Développement asymptotique

Définition 38 *Un développement asymptotique d'une suite* U_n *est une décomposition de la forme*

$$U_n = v_n^0 + v_n^1 + \cdots + v_n^p + o(v_n^p), \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

où les suites $(v_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifient*

$$v_n^{k+1} = o(v_n^k) \tag{30}$$

pour tout $k = 0, \ldots, p-1$.

La décomposition (29) et les conditions (30) signifient que :

- $U_n \sim v_n^0$,
- $U_n - v_n^0 \sim v_n^1$,
- $U_n - (v_n^0 + v_n^1) \sim v_n^2$,
- $\cdots$
- $U_n - (v_n^0 + v_n^1 + \cdots + v_n^{p-1}) \sim v_n^p$.

9.3 Exemples

9.3.1 Exemple 1

Considérons la suite $U_n = \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Pour calculer sa limite, on utilise la fonction $F(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$ étudiée à la section 8.2. On a montré que $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{1}{2}$ et d'autre part on voit que

$$U_n = F(\tfrac{1}{n}), \qquad \forall n \geq 1.$$

Conclusion : $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{2}$

9.3.2 Exemple 2

Considérons la suite $V_n = n\Big(\ln(n) + \ln(e^{\frac{1}{n}} - 1)\Big)$, $n \geq 1$.

Pour comprendre le comportement de la suite (V_n), on utilise la fonction $G(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$, $x > 0$. On remarque que

$$V_n = n\,G(\tfrac{1}{n}), \qquad \forall n \geq 1.$$

Voici le DL_3 de G en 0 : $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^3)$. En effectuant le changement de variables $x = \frac{1}{n}$, obtient un développement asymptotique de la suite (V_n) :

$$V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{24n} + o(\frac{1}{n^3}).$$

9.3.3 Exemple 3

Dans cet exemple, nous allons étudier une suite qui est définie d'une manière différente que dans les exemples précédents.

La fonction $H(x) = \tan(x) - x$ est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Considérons les intervalles

$$I_n =]\tfrac{-\pi}{2} + n\pi, \tfrac{\pi}{2} + n\pi[,$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

Etudions la fonction H sur chaque intervalle I_n. On voit que $H'(x) = \tan(x)^2 \geq 0$, donc H est strictement croissante sur I_n. De plus $\lim_{x\to(\frac{-\pi}{2}+n\pi)^+} H(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+n\pi)^-} H(x) = +\infty$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $H(x_n) = 0$.

Question : Calculons un développement asymptotique de la suite (x_n).

Étape 1 : Commençons par remarquer que $x_n \in I_n \implies |x_n - n\pi| \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\boxed{x_n = n\pi + O(1).} \tag{31}$$

Étape 2 : Posons $x_n = n\pi + y_n$. On a $y_n \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et la relation $\tan(x_n) = x_n$ donne

$$\tan(y_n) = n\pi + y_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ici on a utilisé le fait que $\tan(\pi + x) = \tan(x)$. Cela implique que $y_n = \arctan(n\pi + y_n)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $n \to \infty$. On obtient un raffinement de (31) :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).} \tag{32}$$

Étape 3 : Posons $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - z_n$. Ici (z_n) est une suite de termes strictement positifs tendant vers 0. La relation $\tan(x_n) = x_n$ donne

$$\frac{\cos(z_n)}{\sin(z_n)} = n\pi + \tfrac{\pi}{2} - z_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

On a utilisé le fait que $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Comme (z_n) tend vers 0, on a

$$\frac{1}{z_n} \sim \frac{\cos(z_n)}{\sin(z_n)} = n\pi + \tfrac{\pi}{2} - z_n \sim n\pi.$$

En d'autres termes $z_n \sim \frac{1}{n\pi}$. On obtient ainsi un raffinement de (32) :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n}).} \tag{34}$$

Étape 4 : Posons $z_n = \frac{1}{n\pi} + t_n$, avec $t_n = o(\frac{1}{n})$. L'équation (33) donne la relation

$$\cos(\tfrac{1}{n\pi} + t_n) = \sin(\tfrac{1}{n\pi} + t_n)\Big(n\pi + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n\pi} + o(\tfrac{1}{n})\Big) \tag{35}$$

Utilisons le fait que $\cos(\frac{1}{n\pi} + t_n) = 1 + o(\frac{1}{n})$ et que $\sin(\frac{1}{n\pi} + t_n) = \frac{1}{n\pi} + t_n + o(\frac{1}{n^2})$. Alors (35) donne

$$\begin{aligned} 1 + o(\tfrac{1}{n}) &= \Big(\tfrac{1}{n\pi} + t_n + o(\tfrac{1}{n^2})\Big)\Big(n\pi + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n\pi} + o(\tfrac{1}{n})\Big) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2n} + n\pi\, t_n + o(\tfrac{1}{n}). \end{aligned}$$

Finalement on a

$$t_n = \frac{-1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

On obtient ainsi un raffinement de (34) :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2}).} \tag{36}$$

Conclusion : on pourrait continuer ce procédé pour obtenir des développements asymptotiques de la suite (x_n) de plus en plus précis.