ANALYSE 2

Licence 1ère année — HAX201X

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Table des matières

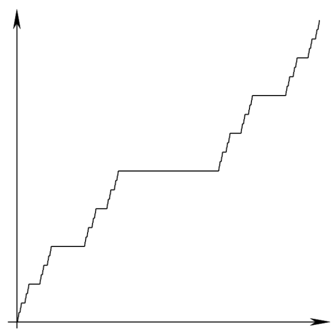
En guise de motivation

À l'inverse de l'algèbre et de la géométrie, étudiées depuis l'Antiquité, notamment en relation avec l'architecture, l'analyse est un domaine relativement récent des mathématiques. Si une école indienne d'analyse locale, fondée par Madhava (1350-1425), existe dès le XIV$^{\text{ème}}$ siècle, il faut attendre le XVII$^{\text{ème}}$ siècle pour en voir le développement en Europe avec Leibniz (1646-1716) et Newton (1643-1727), qui fondent le calcul infinitésimal. La notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle, bien connue des étudiant·e·s de L1, remonte à leurs travaux. De nombreux outils, tels les développements en séries ou la fonction exponentielle, sont ensuite introduits par Euler (1707-1783). Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Bolzano (1781-1848) et Cauchy (1789-1857) formalisent l'analyse et proposent la définition « en (ϵ, δ) » de la limite. Ces travaux sont finalement consolidés par Weierstrass (1815-1897).

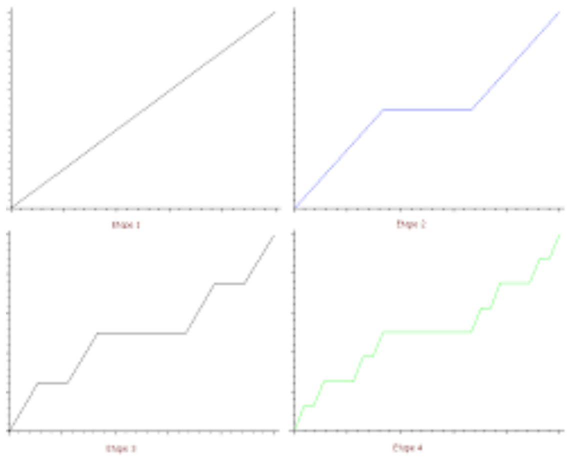
Les cours d'analyse de L1 portent sur les notions de nombres réels, de fonctions d'une variable réelle, et de suites numériques. Deux idées centrales dans ce cours seront la notion de limite d'une suite ou d'une fonction et la notion d'approximation locale d'une fonction réelle. Ces notions peuvent paraître simplistes à première vue, et les exigences de formalisme de l'enseignant peuvent sembler absurde, tant de nombreux résultats sont « évidents » pour celles et ceux qui s'en font de bonnes représentations mentales. Toutefois, le rapport intuitif aux mathématiques devient délicat, voir impossible quand on s'intéresse à des objets plus compliqués, par exemple des fonctions de plusieurs variables, ou bien des fonctions non dérivables.

À titre d'exemple et pour encourager l'étudiant·e intéressé·e par les mathématiques à persévérer ce semestre, voici quelques images d'objets mathématiques plus complexes et souvent plus bizarres que ceux étudiés en L1.

Voici d'abord l'escalier de Cantor (1845-1918) :



Il s'agit du graphe de la fonction de l'intervalle $[0,1]$ dans lui-même obtenue comme suit. À l'étape 1, on part de la fonction $f_1(x) = x$, représentée par une ligne droite, et on la remplace par la fonction $f_2(x)$ « la plus simple » valant $1/2$ sur l'intervalle « tiers du milieu » $[1/3, 2/3]$ et 0 en 0 et 1 en 1. Puis on recommence le processus en remplaçant les deux « diagonales » de f_2 par des lignes brisées « au tiers du milieu plat » pour obtenir f_3, et ainsi de suite.

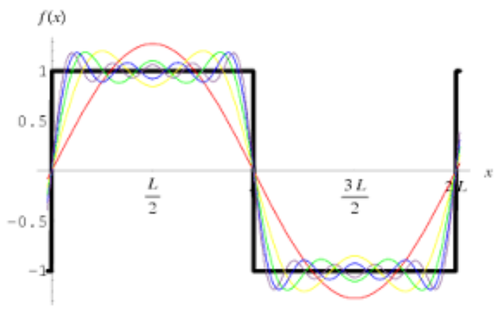


À la limite (laquelle ?), on obtient encore une fonction (en êtes-vous sûr·e ? pourriez-vous en donner une « formule » ?). Cette fonction étrange est une fonction dérivable presque partout (qu'est ce que cela signifie ?) de dérivée nulle presque partout, mais pourtant strictement croissante. À revoir en L3.

La théorie de Fourier (1768-1830) est une des grandes réussites de l'analyse mathématique. Elle permet d'écrire n'importe quelle fonction périodique intégrable (encore un mot à découvrir en L2) comme une somme infinie (donc en particulier comme une limite) de fonctions trigonométriques $\sin(\pi kx/L)$ et $\cos(\pi kx/L)$ où L est la période et k un entier positif. Par exemple, la fonction « créneau » $f(x)$ valant 1 sur $[0, L[$ et -1 sur $[L, 2L[$ et de période $2L$ satisfait :

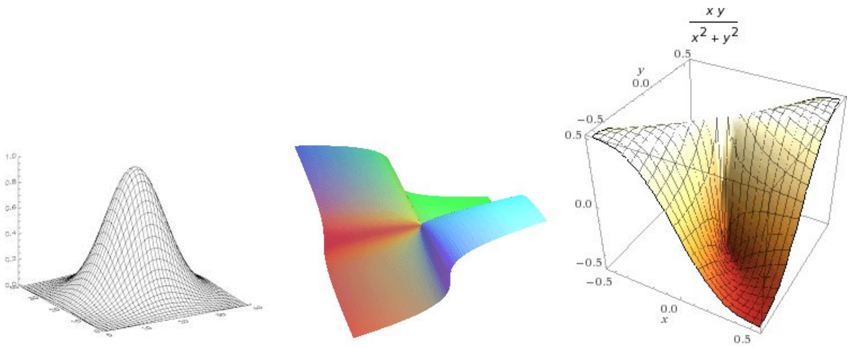
$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{\pi}{L} kx\right)$$

pour tout x qui n'est pas un multiple de L. L'image suivante représente cette fonction créneau et ses approximations pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Fourier lui-même était tellement surpris par ce phénomène qu'il avait du mal à y croire. Pourtant, cela fonctionne, et cette technique est aujourd'hui énormément utilisée en traitement du signal, à la base de nombreuses techniques de transmissions d'informations. Les séries (sommes infinies) de nombres et de fonctions seront vues en L2 et L3.

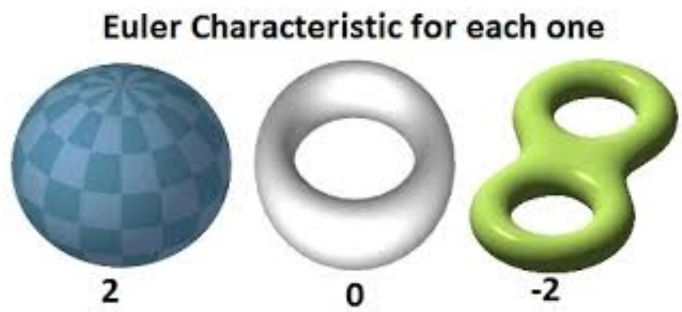
Un point de vue très pratique sur les fonctions réelles d'une variable réelle consiste à tracer leur graphe dans le plan cartésien. Par exemple, la fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le graphe admet une tangente non verticale au point d'abscisse x_0. Cette visualisation n'est pas possible pour des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ pour $p, q \geq 2$. L'étudiant·e devrait déjà méditer le cas « simple » des fonctions réelles de deux variables réelles, c'est-à-dire les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, représentables par des surfaces, et où l'on voit apparaître des singularités variées. Par exemple,



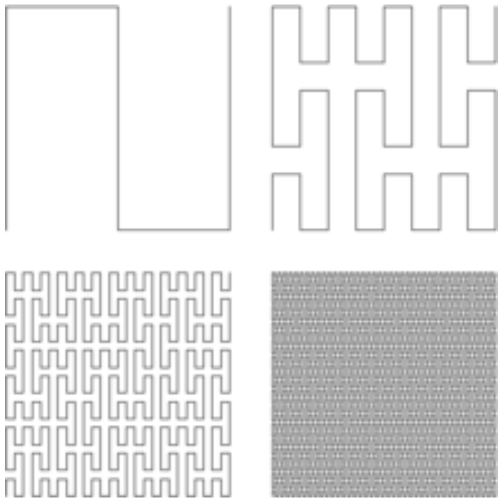
représentent les graphes des fonctions

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \text{ à gauche, } \; g(x,y) = \sqrt[3]{xy} \text{ au centre, } \; h(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ à droite.}$$

L'étude analytique des fonctions de plusieurs variables sera l'objet du cours de calcul différentiel en L2. Plus généralement, les fonctions de plusieurs variables sont un outil de base pour l'étude de la géométrie différentielle (à voir en Master), qui étudie les surfaces et leurs généralisations en dimension ≥ 3.



Plus élémentaires, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^q$, représentées par exemple par les courbes du plan pour $q = 2$, de l'espace pour $q = 3$, que l'on étudiera ce semestre, présentent déjà des singularités surprenantes pour les fonctions usuelles. Avec des fonctions plus abstraites, on peut obtenir des phénomènes très étranges, comme une courbe continue de l'intervalle $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ qui recouvre entièrement le carré unitaire. Peano (1858-1932) a eu l'idée d'une telle courbe, continue, mais pas dérivable, que l'on peut imaginer par les dessins suivants :



Donner un sens précis à cette « courbe » demande déjà une rigoureuse précision.

Les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles sont essentielles pour décrire les phénomènes physiques. Leur étude est très délicate. Par exemple, pouvez-vous trouver une fonction réelle satisfaisant

$$(6f(x) - 1)f'(x) - f^{(3)}(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où $f^{(3)}(x)$ désigne la troisième dérivée de f ? Cette équation différentielle est liée à l'équation différentielle de Korteweg et de Vries (KdV), qui décrit l'évolution d'une vague dans un canal étroit.

Ou encore, pouvez-vous trouver une fonction $\phi(t, x, y)$ de trois variables telle que

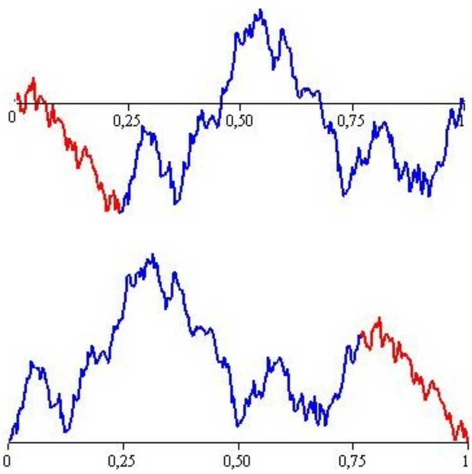
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}, \phi(0, x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}?$$

Cette équation aux dérivées partielles est appelée « équation de la chaleur ». Elle décrit l'évolution de la température d'une pièce en fonction de la température initiale $\phi(0, ., .)$.

Mais avant tout, de telles fonctions existent-elles ? Sont-elles uniquement déterminées par l'équation ? Si oui, peut-on les exprimer avec des fonctions usuelles ? Sinon, peut-on en calculer une bonne approximation ? Que signifie « approcher une fonction » ? Et comment le faire efficacement ?

Voilà des questions naturelles. Les techniques utilisées pour y répondre vont de l'analyse fonctionnelle, où l'on étudie des espaces vectoriels de fonctions et des transformations de ces espaces vectoriels (cela permet par exemple de montrer l'existence de solutions), à l'analyse numérique, discipline centrale des mathématiques appliquées, pour fournir des solutions « par ordinateur » aux physiciens, biologistes, ingénieurs, etc. Ces sujets seront étudiés à divers niveaux d'avancement en Licence et Master.

Enfin, l'étudiant·e de L1 a souvent tendance à penser que les fonctions continues sont dérivables, sauf peut-être à quelques points spécifiques, comme le montre l'exemple de la fonction valeur absolue. Pourtant, les fonctions continues mais dérivables en aucun point non seulement existent, mais sont même tout à fait naturelles du point de vue de l'analyse stochastique (qui mêle analyse et probabilités), très utilisée en finance notamment. Son étude ne sera pas abordée avant le niveau Master, mais l'étudiant·e de L1 devrait garder en mémoire l'image suivante de fonctions « cours de la bourse » :



Ces fonctions sont continues sur $[0, 1]$ mais dérivables en aucun point. On observera aussi que les minima locaux de telles fonctions sont denses dans leur intervalle de définition.

Ces exemples nombreux, et souvent surprenants montrent que l'analyse est une discipline riche. Son développement historique, bien que relativement cours (plus de trois siècles quand même) a été riche de rebondissements. La notion de nombre réel, qui peut paraître intuitive, n'a véritablement été conceptualisée qu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, en relation avec l'introduction de la logique moderne. D'ailleurs, l'étudiant·e attenti·f·ve aura remarqué qu'au premier semestre, nous n'avons pas défini les nombres réels, mais seulement énoncé la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, à savoir que toute partie non-vide majorée admet une borne supérieure (ne pas confondre avec maximum).

La notion d'application vue au premier semestre (quelque chose qui va d'un ensemble départ X vers un ensemble d'arrivée Y et qui à chaque élément de X associe un unique élément de Y) date aussi de cette époque, tout comme les notions de limites de fonctions ou de suites que nous étudions en L1. Ce formalisme est crucial pour l'étude des objets mathématiques évoqués dans cette introduction et de bien d'autres.

C'est pour cela que **l'étudiant·e de L1 doit apprendre à exprimer et rédiger de manière précise et formelle les énoncés mathématiques que nous allons étudier ce semestre**, bien que parfois (mais heureusement pas toujours) ils lui paraîtront « évidents ».

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1. *Une* **suite réelle** *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n, \end{array}$$

c'est-à-dire qu'une suite associe à chaque entier $n \in \mathbb{N}$ *un nombre réel, noté généralement* u_n*, ou plus rarement* $u(n)$*. On note cette suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(u_n)_{n\geq 0}$ *ou encore* (u_n)*. Le nombre réel* $u_n \in \mathbb{R}$ *est le* $n^{\text{ième}}$ *terme de la suite.*

Deux suites (u_n) et (v_n) sont égales si et seulement si elles sont égales en tant qu'applications, c'est-à-dire si et seulement si elles coïncident terme à terme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$.

Dans la définition, on peut remplacer l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ par un ensemble de la forme $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$ pour un $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé, et une telle application est encore appelée une suite. On la note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$. Par exemple, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ n'est pas définie en 0.

Remarque 1.1.2. Nous étudions ce semestre les suites réelles, mais de nombreux énoncés s'appliquent aussi aux suites complexes. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe, alors pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre complexe z_n s'écrit de manière unique $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Les réels x_n et y_n sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z_n. L'étude de la suite (z_n) peut donc se ramener à l'étude des deux suites réelles (x_n) et (y_n).

Il existe plusieurs manières de définir une suite. La plus classique est d'utiliser une formule explicite, par exemple

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 3,$
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

On peut aussi utiliser une formule de récurrence qui permet de calculer u_{n+1} en fonction des termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$. Par exemple,

- $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Dans ce cas, il faut être prudent (voir section 1.6), car une telle formule de récurrence ne définit pas toujours une suite. Par exemple avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, le terme u_1 n'est pas défini !

Une définition par récurrence peut être plus compliquée :

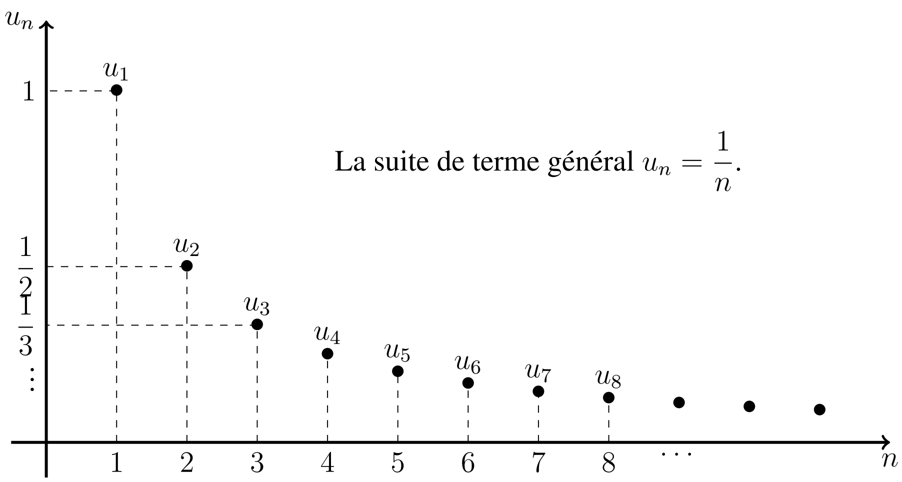
- $u_0 = a \in \mathbb{R}, u_1 = b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n$.

Il y a aussi bien d'autres manières de définir une suite, par exemple

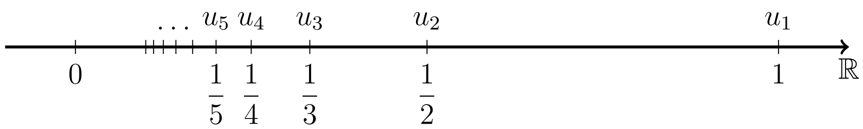
- la suite des décimales de π,
- la suite des temps où une comète passe au périgée, etc.

1.1.2 Représentations graphiques

Il est parfois commode de se représenter graphiquement une suite. Pour cela, il y a deux possibilités. On peut la dessiner dans le plan cartésien comme une fonction réelle. Par exemple, on représente ci-dessous la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.



Une autre possibilité est de la représenter sur la ligne réelle. Dans ce cas, on ne dessine que l'image $\text{Im}(u) = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ de la suite, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises. Il est alors essentiel de se souvenir de l'ordre des termes. On dessine une nouvelle fois la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.



Il ne faut pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ensemble

$$\text{Im}(u) = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, u_n = x\}$$

des valeurs prises par la suite (c'est l'ensemble image de l'application u de la définition 1.1.1). Ce dernier ne tient pas compte de l'ordre des termes, ni des répétitions.

1.1.3 Quelques propriétés élémentaires

Dans l'étude des suites, on va s'intéresser à leurs propriétés, et aux relations entre ces propriétés. On retrouve d'abord l'analogue de propriétés bien connues pour les fonctions réelles.

Définitions 1.1.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) est*

- **constante** *si* $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = c$,
- **périodique** *si* $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$,
- **croissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n$,
- **décroissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n \Rightarrow u_m \leq u_n$.

Il est équivalent (cf. le TD) de dire qu'une suite est croissante (resp. décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\leq u_n$).

Exercice 1. Démontrer formellement que si (u_n) est croissante et décroissante, alors (u_n) est constante.

Il peut être intéressant de savoir qu'une suite a une certaine propriété *à partir d'un certain rang*. Par exemple, la suite de terme général $u_n = (n-1)^2$ n'est pas croissante, car $u_0 = 1 > 0 = u_1$. Mais elle est croissante à partir du rang 1, c'est-à-dire que $\forall n \geq 1, \forall m \geq 1, m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n$.

Définition 1.1.4. *Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) est*

- *constante à partir du rang N_0 si $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \geq N_0,\ u_n = c$*
- *croissante à partir du rang N_0 si $\forall n \geq N_0,\ \forall m \geq N_0,\ m \geq n \Rightarrow u_m \geq u_n$.*
- *décroissante à partir du rang N_0 si $\forall n \geq N_0,\ \forall m \geq N_0,\ m \geq n \Rightarrow u_m \leq u_n$.*

On dit que (u_n) est constante (resp. croissante) à partir d'un certain rang s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ telle que (u_n) est constante (resp. croissante) à partir de N_0.

Bien sûr, on définit de la même manière les suites périodique ou décroissante à partir d'un certain rang. Notez qu'une suite constante à partir d'un certain rang est dite **stationnaire**. Plus anecdotiquement, une suite périodique à partir d'un certain rang est dite *ultimement périodique*.

Exercice 2. On note $[x]$ la partie entière du nombre réel x. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \left[\dfrac{1}{n}\right]$ est stationnaire.

Une suite réelle étant une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut lui associer les notions de majorant, de minorant et de borne.

Définitions 1.1.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

- *Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M majore la suite (u_n) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.*

- *La suite (u_n) est* **majorée** *s'il existe un réel M qui majore (u_n) c'est-à-dire si*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M.$$

- *Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m minore la suite (u_n) si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.*
- *La suite (u_n) est* **minorée** *s'il existe un réel m qui minore (u_n) c'est-à-dire si*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m.$$

- *Soit $C \in \mathbb{R}$. On dit que C borne (u_n) si $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C$.*
- *La suite (u_n) est* **bornée** *s'il existe un réel C qui borne (u_n), c'est-à-dire si*

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C.$$

On notera (cf. le TD) qu'une suite est bornée si et seulement si elle est majorée est minorée.

On observera également que la suite (u_n) est majorée par M si et seulement si le sous-ensemble $\mathrm{Im}(u) = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est majoré par M en tant que partie de $\mathbb{R}$, et de même pour les cinq autres points.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. (u_n) est majorée,
2. (u_n) est majorée à partir d'un certain rang.

Soit M un réel. Donner un contre-exemple montrant que les deux assertions suivantes ne sont pas équivalentes :

3. (u_n) est majorée par M,
4. (u_n) est majorée par M à partir d'un certain rang.

1.2 Suites convergentes

Définition 1.2.1. *Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un nombre réel. On dit que* **la suite** (u_n) **converge vers** ℓ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

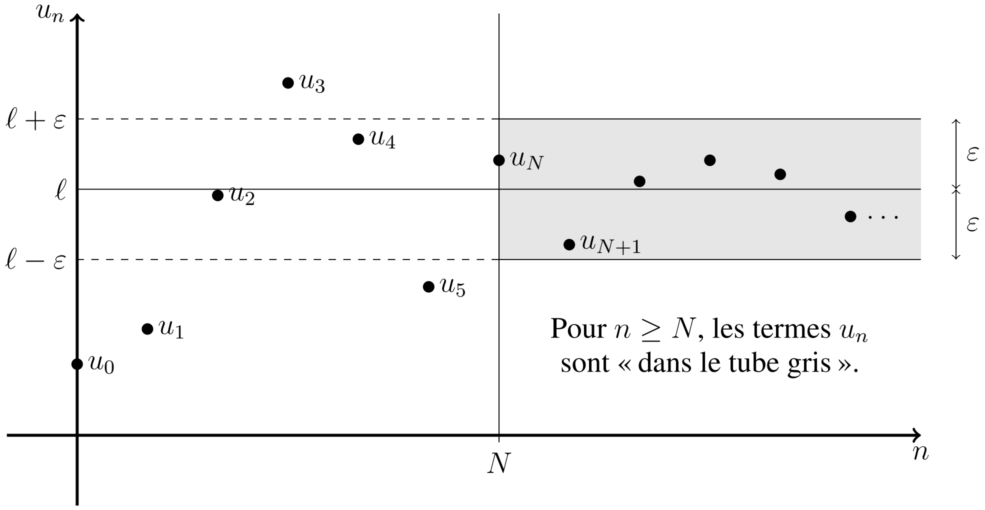
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, et on appelle ℓ la **limite** *de la suite.*

La valeur absolue $|u_n - \ell|$ mesure l'écart entre le terme u_n et la limite ℓ. On a :

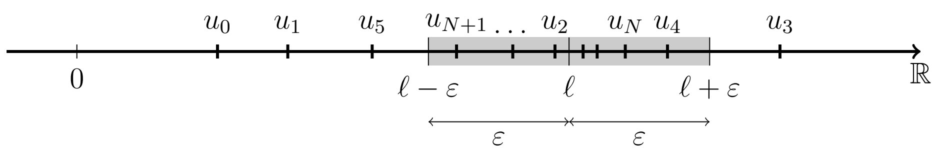
$$\begin{aligned} |u_n - \ell| \leq \varepsilon &\iff -\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon \\ &\iff \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon \\ &\iff u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]. \end{aligned}$$

La définition ci-dessus s'interprète comme « quelle que soit la précision ε demandée, il existe un rang N à partir duquel l'écart entre le terme u_n et la limite ℓ est majoré par ε ».

Représentation « comme une fonction » d'une suite convergente :



Représentation « par l'image dans $\mathbb{R}$ » d'une suite convergente :



Pour $n \geq N$, les termes u_n sont dans $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

FIGURE 1.1 – Illustrations de la définition d'une suite convergente.

La compréhension de cette définition peut être aidée par les représentations graphiques des suites, voir Figure 1.1.

Remarques 1.2.2.

- Un point clé de la définition est qu'un tel rang doit exister pour **toute** précision $\varepsilon > 0$ requise, aussi minuscule soit-elle. Par conséquent, pour une suite donnée, le rang N dépend de ε.
- Notez que considérer la limite d'une suite revient à faire tendre n vers l'infini, ce qu'on note $n \to +\infty$. La limite « quand n tend vers l'infini » d'une suite étant en général la seule limite intéressante de la suite, on l'appelle simplement la limite de la suite. C'est très différent avec les fonctions, qui peuvent avoir des limites intéressantes en tout point adhérent à leur domaine de définition (cf. le semestre 1).

Exemple 1.2.3. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

Démonstration. Soit $\underline{\varepsilon > 0}$ arbitraire. Soit N un entier tel que $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (un tel entier N existe bien, par exemple $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ où $[x]$ est la partie entière du réel x). Maintenant, si $n \geq N$, on a aussi $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ (on utilise ici que les deux membres de la première inégalité sont positifs). De plus $|u_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$. L'inégalité précédente se réécrit donc $\underline{|u_n - 0| \leq \varepsilon}$.

(Les parties soulignées de la démonstration correspondent aux différents éléments de la définition 1.2.1.) □

Proposition 1.2.4 (Unicité de la limite)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers ℓ et (u_n) converge vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.*

Cette proposition semble évidente, mais notre objectif est d'en donner une preuve formelle basée directement sur les définitions que nous avons données ci-dessus. Pour cela, on utilise la célèbre

inégalité triangulaire : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |a + b| \leq |a| + |b|$. (Revoir sa démonstration en TD.)

Démonstration de la proposition 1.2.4. **(à savoir faire)** On procède par l'absurde, en supposant $\ell \neq \ell'$. On pose $\varepsilon_0 := \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$.

Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon_0$.

Comme (u_n) converge vers ℓ', il existe N_2 tel que $\forall n \geq N_2, |u_n - \ell'| \leq \varepsilon_0$.

Il n'y a pas de raison a priori que N_1 et N_2 soient égaux. Mais si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors on a $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon_0$ et $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon_0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\ell - \ell'| &= |\ell - u_n + u_n - \ell'| \\
&\leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \text{ par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq |\ell - u_n| + |\ell' - u_n| \\
&\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{2}{3} < 1$, c'est une contradiction si $|\ell - \ell'| > 0$. (L'étudiant·e est invité·e à faire des représentations graphiques pour comprendre le choix de ε_0.) □

Définition 1.2.5. *Soit (u_n) une suite réelle.*

- *On dit que (u_n)* **converge** *s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers ℓ.*
- *On dit que (u_n)* **diverge** *si (u_n) ne converge pas.*

La notion de suite convergente est utile car elle permet de mentionner qu'une suite admet une limite réelle sans devoir préciser quelle est sa limite (on verra avec l'expérience qu'il est souvent beaucoup plus difficile de déterminer la limite d'une suite que de simplement montrer son existence).

Proposition 1.2.6. *Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.*

La réciproque est fausse. On vérifiera à titre d'exercice que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée et divergente.

Démonstration. **(à savoir faire)** On considère une suite convergente (u_n) fixée. Notre objectif est de trouver un réel C tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C$.

Comme (u_n) converge, on sait qu'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ, c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

En particulier pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un rang N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq 1$.

Or $|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell|$ par inégalité triangulaire. A fortiori, $\forall n \geq N_1,\ |u_n| \leq 1 + |\ell|$. Cela signifie que (u_n) est bornée par $1 + |\ell|$ à partir du rang N_1.

On pose finalement $C = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N_1-1}|, 1 + |\ell|\}$ (le maximum existe car cet ensemble est fini avec $N_1 + 1$ éléments).

On a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C$. □

Définition 1.2.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

- *On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

On le note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- *On dit que* (u_n) *tend vers* $-\infty$ *si*

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, u_n \leq B.$$

On le note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 4. Montrer que (u_n) tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite (v_n) de terme général $v_n = -u_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) diverge.

Exemple 1.2.8. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $A \geq 0$ arbitraire. Soit N un entier tel que $N \geq \sqrt{A}$ (un tel entier N existe, par exemple $N = [\sqrt{A}] + 1$ où $[x]$ est la partie entière du réel x). Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N$ donc $n \geq \sqrt{A}$, donc $n^2 \geq A$, c'est-à-dire $u_n \geq A$.

Si $A < 0$, alors pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = n^2 \geq A$. La définition est valide pour $N = 0$. □

Les exemples 1.2.3 et 1.2.8 se généralisent par la proposition suivante (qui se démontre de la même façon).

Proposition 1.2.9. *Soit* $p \in \mathbb{Z}$*, alors*

1. *si* $p > 0$*, alors* $n^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*,*
2. *si* $p < 0$*, alors* $n^p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*.*

On rappelle que par convention, $\forall x > 0,\ x^0 = 1$, de sorte que la suite (n^0) est la suite constante égale à 1.

On rappelle aussi que si $x, r > 0$ sont deux réels strictement positifs, alors $x^r = e^{r\ln(x)} > 0$ est bien défini. On a encore $n^r \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Proposition 1.2.10. *Soit* $q \in \mathbb{R}$*, alors*

1. *si* $q > 1$*, alors* $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*,*
2. *si* $|q| < 1$*, alors* $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*.*

Démonstration. Voir le TD pour une démonstration sans la fonction exponentielle. On y étudiera aussi la suite (q^n) pour les autres valeurs réelles de q. □

1.3 Opérations sur les limites

Pour étudier la convergence d'une suite donnée par une formule, on utilise rarement la définition. À la place, on se ramène souvent à des suites bien connues en décomposant la formule par les opérations usuelles. On déduit alors la limite par le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On suppose que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ *avec* $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Alors*

1. *la suite valeur absolue satisfait* $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell|$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, *la suite multipliée par le scalaire* λ *satisfait* $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$,
3. *la suite somme satisfait* $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$,
4. *la suite produit satisfait* $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$,
5. *si* $\ell \neq 0$, *alors il existe un rang* N *tel que* $\forall n \geq N, u_n \neq 0$ *et la suite inverse (bien définie à partir du rang* N*) satisfait* $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.

Le sens des opérations est clair pour ℓ et ℓ' réels (non nuls pour inverser). Dans le cas où l'une des deux limites est infinie, le théorème s'applique avec les règles de calcul suivantes :

- Limite de la suite somme $(u_n + v_n)$:

ℓ \ ℓ'	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	indéterminée
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	indéterminée	$+\infty$	$+\infty$

- Limite de la suite produit $(u_n v_n)$:

<table>
<tr><th>ℓ \ ℓ'</th><th>$-\infty$</th><th>$\ell' < 0$</th><th>$\ell' = 0$</th><th>$\ell' > 0$</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>indéterminée</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell < 0$</td><td>$+\infty$</td><td rowspan="3" colspan="3">$\ell\ell'$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell = 0$</td><td>indéterminée</td><td>indéterminée</td></tr>
<tr><td>$\ell > 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>indéterminée</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

- La valeur absolue de $+\infty$ correspond à $+\infty$ et la valeur absolue de $-\infty$ correspond aussi à $+\infty$.
- L'inverse de $+\infty$ correspond à 0. L'inverse de $-\infty$ correspond aussi à 0. Par contre, l'inverse de zéro est *indéterminé*.

Remarque 1.3.2. Ci-dessus, l'adjectif « indéterminé » signifie que le théorème ne donne pas de réponse. Par exemple, les suites $u_n = n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ont des limites connues. Le théorème *ne détermine pas* la limite de la suite produit $(u_n v_n)$. Pourtant, on peut trouver cette limite en faisant un calcul direct $u_n v_n = \dfrac{n^2}{n} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. (L'étudiant·e pourra montrer que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ en s'inspirant de l'exemple 1.2.8.)

Le théorème ne donne pas cette réponse parce qu'on peut trouver d'autres suites $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ telles que la limite de la suite produit $(u_n v_n)$ n'est pas $+\infty$. À titre d'exercice, l'étudiant·e pourra chercher deux telles suites dont le produit tend vers 0.

Nous verrons plus loin (cf. corollaire 1.5.5) le cas plus général de la composition d'une suite par une fonction continue.

Démonstration (partielle) du Théorème 1.3.1. **(à savoir faire)** Notre but n'est pas de donner une preuve complète de tous les cas de suites traités par ce théorème, mais de bien comprendre comment on démontre ce type de résultats. L'enseignant·e a donc choisi quelques cas emblématiques.

Preuve du 2. avec ℓ réel. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On utilise la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$. Cela assure l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{array}{rl} \forall n \geq N, & |u_n - \ell| \leq \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}, \\ \text{c'est-à-dire} & |\lambda||u_n - \ell| \leq \varepsilon, \\ \text{c'est-à-dire} & |\lambda u_n - \lambda\ell| \leq \varepsilon. \end{array}$$

Preuve du 3. avec ℓ, ℓ' réels. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. On doit montrer que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

<u>Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire</u>. Soit $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

Comme $u_n \to \ell$, il existe un rang N_1 tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon'. \tag{1.1}$$

Et comme $v_n \to \ell'$, il existe un rang N_2 tel que

$$\forall n \geq N_2, |v_n - \ell'| \leq \varepsilon'. \tag{1.2}$$

<u>On pose $N = \max(N_1, N_2)$</u>. On a alors <u>$\forall n \geq N$</u>

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| &= |u_n - \ell + v_n - \ell'| \\ &\leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \text{ par inégalité triangulaire,} \\ &\leq \varepsilon' + \varepsilon' \text{ par (1.1) et (1.2)} \\ &= 2\varepsilon' = \varepsilon. \end{aligned}$$

Preuve du 4. avec ℓ, ℓ' réels. On démontre d'abord le

Lemme 1.3.3. *Si $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $s_n t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration du Lemme 1.3.3. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Soit $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Comme $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe N_1 tel que $\forall n \geq N_1, |s_n| \leq \varepsilon'$. Et comme $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe N_2 tel que $\forall n \geq N_2, |t_n| \leq \varepsilon'$. On pose $N = \max(N_1, N_2)$, et alors $\forall n \geq N, |s_n t_n| = |s_n||t_n| \leq \varepsilon'^2 = \varepsilon$. (L'étudiant·e remarquera la similarité avec la preuve du 3. ci-dessus.) □

On considère maintenant nos deux suites $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. On pose $s_n = u_n - \ell$ et $t_n = v_n - \ell'$. On a donc $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' - \ell'$ d'après la somme des limites (3.). On peut alors développer le produit

$$u_n v_n = (s_n + \ell)(t_n + \ell') = s_n t_n + s_n \ell' + \ell t_n + \ell\ell'. \tag{1.3}$$

Or $s_n t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le lemme 1.3.3, $s_n \ell' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ell t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la multiplication par un scalaire des limites (2.), et $\ell\ell' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$ évidemment. En utilisant une fois de plus la somme des limites (3.), on déduit de (1.3) que $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 + 0 + \ell\ell' = \ell\ell'$. □

L'étudiant·e doit être capable de traiter les autres cas du théorème, par exemple démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Le cas de l'inverse (5.) est à peine plus délicat et sera traité en TD en admettant que si $\ell \neq 0$, alors il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, u_n \neq 0$. Cette dernière hypothèse sera justifiée par la section suivante.

Exemple 1.3.4. On a $u_n = \dfrac{n^4 - n}{n^2 + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. On factorise

$$u_n = \frac{n^4 - n}{6n^2 + 1} = \frac{n^4\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(6 + \frac{1}{n^2}\right)} = n^2 \frac{1 - \frac{1}{n^3}}{6 + \frac{1}{n^2}}.$$

D'après la proposition 1.2.9, on a $\dfrac{1}{n^3} = n^{-3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par somme des limites, $1 - \dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De même, $6 + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 6$, et par inverse de limite, $\dfrac{1}{6 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$. Par produit, $\dfrac{1 - \frac{1}{n^3}}{6 + \frac{1}{n^2}} = \left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)\left(\dfrac{1}{6 + \frac{1}{n^2}}\right) \to \dfrac{1}{6}$. Enfin, d'après la proposition 1.2.9, on a $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et par produit, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Exemple 1.3.5. Soient (v_n) et (w_n) deux suites telles que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \neq 0$. On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$. À la question « que peut-on dire de (u_n) ? », la réponse est « RIEN ».

En effet, n'importe quelle suite réelle (u_n) peut s'écrire sous la forme $u_n = \dfrac{v_n}{w_n}$ avec deux suites (v_n) et (w_n) ayant ces propriétés. Pour cela, il suffit de poser

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \begin{cases} \dfrac{1}{nu_n} & \text{si } |u_n| \geq 1, \\ \dfrac{u_n^2}{n} & \text{si } 0 < |u_n| \leq 1, \\ 0 & \text{si } u_n = 0, \end{cases} \quad \text{et } w_n = \begin{cases} \dfrac{1}{nu_n^2} & \text{si } |u_n| \geq 1, \\ \dfrac{u_n}{n} & \text{si } 0 < |u_n| \leq 1, \\ w_n = \dfrac{1}{n} & \text{si } u_n = 0. \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n| \leq \dfrac{1}{n}$ et $|w_n| \leq \dfrac{1}{n}$.

1.4 Limites et inégalités

1.4.1 Lien entre le signe de la limite d'une suite et le signe de ses termes

Proposition 1.4.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\ell > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ u_n > 0$.*

Remarques 1.4.2.

- On remarque que ce résultat est faux pour $\ell \geq 0$ comme le montre la suite de terme général $u_n = -\dfrac{1}{n}$.
- On observe aussi que c'est un résultat « asymptotique » au sens où la conclusion est vraie seulement à partir d'un certain rang (bien sûr, connaître la limite d'une suite n'indique rien sur les premiers termes).
- Cette proposition se généralise immédiatement en
  Soit a un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\ell > a$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n > a$.
  Pour cela, il suffit d'appliquer la proposition 1.4.1 telle quelle à la suite $v_n = u_n - a$ (Exercice : vérifiez-le !).

Démonstration. **(à savoir faire)** On utilise la définition de convergence pour $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$. Cela donne l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \qquad & |u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}, \\ \text{c'est-à-dire} \quad & -\frac{\ell}{2} \leq u_n - \ell \leq \frac{\ell}{2}, \\ \text{c'est-à-dire} \quad & \ell - \frac{\ell}{2} \leq u_n \leq \ell + \frac{\ell}{2}, \\ \text{c'est-à-dire} \quad & \frac{\ell}{2} \leq u_n \leq \frac{3\ell}{2}. \end{aligned}$$

En particulier, $\forall n \geq N, u_n \geq \dfrac{l}{2} > 0$. (L'étudiant·e est invité·e à se faire une représentation graphique de cette preuve.) $\square$

Proposition 1.4.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.*

Remarques 1.4.4.

- On remarque que l'assertion « si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, alors $\ell > 0$ » est fausse comme le montre l'exemple de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.
- On observe aussi que la conclusion est encore vraie sous l'hypothèse seulement « asymptotique » $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq 0$.
- Comme la précédente, cette proposition se généralise en
  Soit a un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq a$, alors $\ell \geq a$.

Démonstration. On procède par l'absurde, en supposant que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et que $\ell < 0$. On pose alors $v_n = -u_n$. On a $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ell > 0$ d'après la somme des limites. Donc, d'après la proposition 1.4.1 (appliquée à (v_n)), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ v_n > 0$. Ceci équivaut à $\forall n \geq N,\ -u_n > 0$, c'est-à-dire $u_n < 0$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. $\square$

1.4.2 Limites des suites monotones

On rappelle qu'une suite (u_n) est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante. (Exercice : donner un exemple de suite non-monotone.) Le résultat fondamental suivant assure que les suites réelles monotones ont toujours une limite (finie ou infinie). Plus précisément :

Théorème 1.4.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, alors*

1. *si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge,*
2. *si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Ce théorème est très important. Il permet de montrer qu'une suite converge vers une limite réelle sans que l'on ait besoin d'identifier cette limite.

Le résultat similaire pour les suites décroissantes s'en déduit comme :

Corollaire 1.4.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, alors*

1. *si (u_n) est minorée, alors (u_n) converge,*
2. *si (u_n) n'est pas minorée, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*

Démonstration du corollaire 1.4.6. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} (u_n) \text{ décroissante} &\iff (-u_n) \text{ croissante },\\ (u_n) \text{ minorée} &\iff (-u_n) \text{ majorée },\end{aligned}$$

et d'appliquer le théorème 1.4.5. □

La deuxième partie du théorème se montre facilement.

Démonstration du 2. du théorème 1.4.5. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) est non-majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Mais alors $\forall n \geq N,\ u_n \geq u_N$, car (u_n) est croissante. A fortiori, $\forall n \geq N,\ u_n \geq A$. □

La première partie du théorème est plus délicate. Il s'agit d'une propriété essentielle, basée sur la :

Propriété (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$)**.** *Toute partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet une borne supérieure.*

On rappelle (cf premier semestre) que le sup (ou borne supérieure) d'une partie X de $\mathbb{R}$ est le plus petit élément (appelé minimum) de l'ensemble des majorants de la partie X. Notez que dans un ensemble ordonné autre que $\mathbb{R}$, il peut y avoir des parties majorées qui n'ont pas de borne supérieure (cela arrive par exemple dans $\mathbb{Q}$). On rappelle aussi la caractérisation du sup vue au premier semestre :

Théorème 1.4.7. *Soit $X \subset \mathbb{R}$ non-vide et majorée et soit ℓ un réel, alors*

$$\ell = \sup(X) \iff \begin{cases} & \ell \textit{ majore } X \textit{ (c'est-à-dire } \forall x \in X,\ x \leq \ell\textit{)},\\ \textit{et} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\ x \geq \ell - \varepsilon. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant démontrer la première partie du théorème 1.4.5.

Démonstration du 1. du Théorème 1.4.5. Soit $X = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs prises par la suite (u_n). La partie X est majorée car (u_n) est majorée et non-vide (elle contient u_0 par exemple), donc d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, la partie X admet une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$.

On montre maintenant que la suite (u_n) converge vers ce nombre ℓ. Pour cela, on va utiliser la caractérisation du sup du théorème 1.4.7.

D'une part, ℓ majore X, donc on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell. \tag{1.4}$$

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme $\varepsilon > 0$, il existe x dans X tel que $\ell - \varepsilon \leq x$, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq u_N$. Par croissance de (u_n) on a $\forall n \geq N,\ u_N \leq u_n$, et donc a fortiori,

$$\forall n \geq N,\ \ell - \varepsilon \leq u_n. \tag{1.5}$$

En combinant (1.4) et (1.5), on obtient $\forall n \geq N,\ \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$, et donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

1.4.3 Suites adjacentes

Théorème 1.4.8 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que*

1. *(u_n) est croissante,*
2. *(v_n) est décroissante,*
3. *$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$,*
4. *$v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,*

alors il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers ℓ.

Deux suites satisfaisant les hypothèses 1. À 4. de ce théorème sont dites **adjacentes**. Comme d'habitude, l'étudiant·e est invité·e à représenter graphiquement ce théorème.

Démonstration. **(à savoir faire)** Le suite (u_n) est croissante, et majorée par v_0 (car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq v_0$). D'après le théorème 1.4.5 de convergence des suites majorées, on déduit que (u_n) converge, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

On a de plus $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, donc v_n est la somme de la suite $(v_n - u_n)$ qui converge vers 0 et de la suite (u_n) qui converge vers ℓ. D'après le théorème 1.3.1 sur les sommes de limites, on en déduit que (v_n) converge aussi vers $0 + \ell = \ell$. □

Exemple 1.4.9. Pour $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

On va montrer que les suites (S_{2m}) et (S_{2m+1}) sont adjacentes. Le théorème 1.4.8 assure alors qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $S_{2m} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $S_{2m+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On en déduit (Exercice, cf. section 1.7) que la suite entière $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On verra en L2 (et on pourra deviner à la fin de ce semestre) que $\ell = \ln(2)$.

Il reste à vérifier les propriétés 1. À 4. des suites adjacentes.

1. (S_{2m}) est croissante. En effet, on a :

$$\begin{aligned} S_{2m} &= 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \\ S_{2(m+1)} = S_{2m+2} &= 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2(m+1)} - S_{2m} = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} \geq 0$, car $\frac{1}{2m+1} \geq \frac{1}{2m+2}$, car $2m+2 \geq 2m+1$.

2. (S_{2m}) est décroissante (Exercice).

3. $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ S_{2m} \leq S_{2m+1}$. En effet, on a

$$S_{2m+1} - S_{2m} = \frac{(-1)^{2m+2}}{2m+1} = \frac{((-1)^2)^{m+1}}{2m+1} = \frac{1}{2m+1} \geq 0.$$

4. $S_{2m+1} - S_{2m} = \dfrac{1}{2m+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1.5 Quelques liens avec des notions connues

On décrit ici comment les suites peuvent être utiles pour discuter de notions vues au premier semestre, comme l'adhérence d'un point à une partie, la caractérisation de la borne supérieure, la définition de la limite ou la continuité d'une fonction réelle.

Pour une partie A de $\mathbb{R}$, on rappelle que le réel x est dit **adhérent** à A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| < \varepsilon.$$

Proposition 1.5.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et x un réel. Alors x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.*

Démonstration. Si une telle suite existe, alors en particulier $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ |a_N - x| < \varepsilon$, et a_N est bien dans A.

Inversement, supposons que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |a - x| < \varepsilon$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on l'applique à $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$ pour déduire l'existence de $a_n \in A$ tel que $|a_n - x| < \dfrac{1}{n}$. On déduit du théorème des gendarmes que (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x. □

En vertu de cette proposition, on dit que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ s'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemples 1.5.2.

- Si $x \in A$, alors x est adhérent à A. En effet, il suffit de prendre la suite constante $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = x$.
- 0 est adhérent à $]0, +\infty[$. En effet, la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n}$ est une suite d'éléments de $]0, +\infty[$ qui converge vers 0.
- $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{Q}$ car la suite de terme général $a_n = n$ est une suite de rationels qui tend vers $+\infty$.
- $-\infty$ est adhérent à $\mathbb{Z}$ car la suite de terme général $a_n = -n$ est une suite d'entiers relatifs qui tend vers $-\infty$.
- $\dfrac{1}{2}$ n'est pas adhérent à $\mathbb{N}$, car l'inéquation $\left|\dfrac{1}{2} - x\right| < \dfrac{1}{2}$ n'admet aucune solution entière.

Dans l'esprit de la proposition 1.5.1, l'étudiant·e doit être capable de traiter l'exercice suivant, qui caractérise la borne supérieure d'une partie majorée au moyen de suites.

Exercice 6. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée, et x un réel. Montrer que

$$x = \sup A \iff \begin{cases} & \forall a \in A,\ a \leq x \\ \text{et} & \text{il existe une suite } (a_n) \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x. \end{cases}$$

La proposition suivante sera particulièrement utile afin d'étudier les suites récurrentes. Elle donne une caractérisation de la limite d'une fonction par des suites.

Proposition 1.5.3. *Soient $a, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de domaine de définition D_f. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in D_f$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.*

Démonstration. On démontre ce résultat seulement dans le cas où $a, \ell \in \mathbb{R}$. (Les autres cas sont laissés à l'étudiant·e à titre d'exercice.) On rappelle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D_f,\ \text{si } |x-a| \leq \delta,\ \text{alors } |f(x) - \ell| \leq \varepsilon. \tag{1.6}$$

On montre d'abord que l'assertion 1. implique l'assertion 2. Pour cela, on considère une suite (x_n) d'éléments de D_f qui converge vers a, et on montre que la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. D'après (1.6), il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x - a| \leq \delta$, alors $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Or, d'après la convergence $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ avec $\varepsilon' = \delta > 0$, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N,\ |x_n - a| \leq \delta$. D'après le choix de δ, on en déduit que, pour tout $n \geq N$, on a aussi $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$.

On montre maintenant que l'assertion 2. implique l'assertion 1. Pour cela, on procède par contraposée, en montrant que l'assertion « non 1. » implique l'assertion « non 2. ».

On suppose donc que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a. Cela signifie par négation de (1.6) :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in D_f,\ |x-a| \leq \delta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon. \tag{1.7}$$

On utilise ce $\varepsilon > 0$ qui existe bien comme suit. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le réel $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$. D'après (1.7), il existe donc un réel $x_n \in D_f$ tel que les deux inégalités $|x_n - a| \leq \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$ sont vraies.

On déduit de la première inégalité que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ (en écrivant $a - \dfrac{1}{n} < x_n < a + \dfrac{1}{n}$ et en utilisant le théorème des gendarmes) ;

et l'on déduit de la seconde inégalité que $f(x_n)$ ne tend pas vers ℓ (sans quoi l'on aurait $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang). Ainsi l'assertion 2. n'est pas vérifiée. □

Exemple 1.5.4. La fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, on a $x_n = 2\pi n \to +\infty$ avec $\cos(x_n) = \cos(0) = 1 \to 1$ d'une part, mais d'autre part $y_n = 2\pi n + \pi \to +\infty$ avec $\cos(y_n) = \cos(\pi) = -1 \to -1$. D'après la proposition 1.5.3, une limite éventuelle de $\cos$ en $+\infty$ devrait valoir à la fois 1 et -1, ce qui n'est pas possible par unicité d'une limite éventuelle.

En pratique, on utilisera plus souvent le corollaire ci-dessous :

Corollaire 1.5.5. *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D_f. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est continue en a.*
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in D_f$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.*

Démonstration. C'est un cas particulier de la proposition 1.5.3, car f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (cf. premier semestre). $\square$

1.6 Suites récurrentes

Question 1.6.1. *Que vaut $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$?*

La question semble presque absurde, car pour pouvoir calculer, il faudrait déjà connaître la réponse. Pourtant, on va voir avec l'étude des suites récurrentes que l'on peut donner une réponse précise à cette question.

Proposition 1.6.2. *Soient A un ensemble, $f : A \to A$ une application et $a \in A$ un élément. Alors il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que*

$$u_0 = a \ \textit{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Une telle suite est appelée **suite récurrente**. Il est essentiel que l'image de l'application f soit incluse dans son domaine de définition, sans quoi la suite ne serait pas définie pour tous les entiers n (par exemple $f(x) = \sqrt{x-2}$ avec $u_0 = 1$). Cette proposition se démontre évidemment par... récurrence !

Exemple 1.6.3. Avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a quelques exemples classiques où l'on peut donner une formule explicite pour le $n^{\text{ième}}$ terme.

1. Pour $f(x) = x + b$, ce sont les suites arithmétiques de raison $b \in \mathbb{R}$. On a

$$u_n = u_0 + nb \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } b > 0, \\ u_0 & \text{si } b = 0, \\ -\infty & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

2. Pour $f(x) = ax$, ce sont les suites géométriques de raison $a \in \mathbb{R}$. On a

$$u_n = a^n u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \text{ ou } u_0 = 0, \\ u_0 & \text{si } a = 1, \\ +\infty & \text{si } a > 1 \text{ et } u_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } a > 1 \text{ et } u_0 < 0, \end{cases}$$

et (u_n) n'a pas de limite si $a \leq -1$ et $u_0 \neq 0$ (le vérifier !).

3. Pour $f(x) = ax + b$, ce sont les suites arithmético-géométriques (cf. le TD). On a, lorsque $a \neq 1$ (c'est-à-dire lorsque la suite n'est pas seulement arithmétique !),

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}.$$

Étude d'un premier exemple :

On considère une suite récurrente associée à la fonction $f : [-1, +\infty[\to [-1, +\infty[$, donnée par $f(x) = \sqrt{x+1}$. Soit donc (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in [-1, +\infty[\ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + 1}.$$

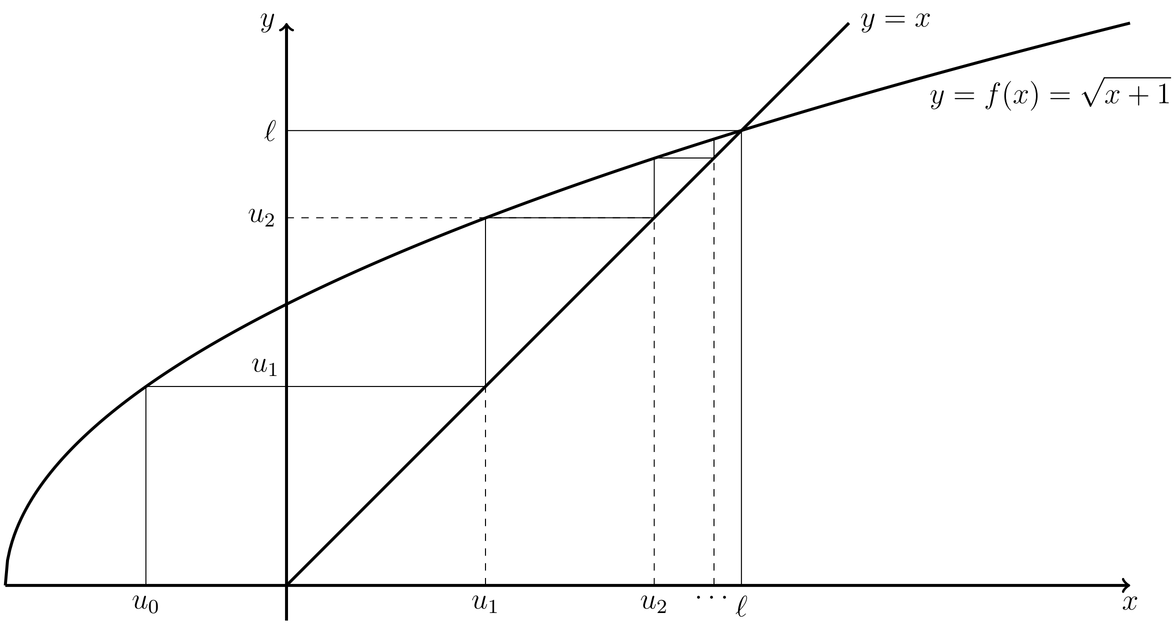


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de la suite récurrente associée à $f(x) = \sqrt{1+x}$.

On commence par observer graphiquement cette suite récurrente. On dessine cette suite pour la valeur $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ dans la figure 1.2. Pour cela, on trace le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$. On considère le point d'abscisse u_0 sur l'axe horizontal. On reporte alors l'ordonnée $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe vertical. Au moyen de la diagonal $y = x$, on reporte par symétrie le point d'abscisse u_1 sur l'axe horizontal, et on répète la procédure.

On <u>devine</u> alors que la suite (u_n) converge vers l'abscisse du point d'intersection de la droite $y = x$ avec la courbe $y = f(x)$, c'est-à-dire vers la solution ℓ de l'équation $\ell = f(\ell)$.

Pour se faire une idée, on cherche à résoudre. On a (attention à l'usage différencié des égalités, des équivalents, et d'une implication) :

$$f(\ell) = \ell \iff \sqrt{\ell + 1} = \ell \implies \ell + 1 = \ell^2 \iff \ell^2 - \ell - 1 = 0, \tag{1.8}$$

donc ℓ doit satisfaire l'équation du second degré concluant la ligne ci-dessus. On calcule le discriminant $\Delta = 5$, et on déduit que $\ell \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

On observe alors que la limite ne peut pas être $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ car ce nombre est négatif (justifiez-le !). Or, d'après la proposition 1.4.1, cela impliquerait qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) soient strictement négatifs aussi, alors que pour $n \geq 1$, ce sont des racines carrées, donc des nombres positifs. La seule limite possible est donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Notons que ceci semble valide pour *toute* valeur de u_0 dans l'intervalle $[-1, \ell] = \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Ces observations sont intéressantes. Elles permettent de <u>deviner</u> la limite, mais ne suffisent malheureusement pas à <u>prouver</u> que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C'est ce que nous allons faire maintenant, en trois étapes.

- **Étape 1.** *Si* $u_0 \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$*, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

  Pour cela, on montre que $\forall x \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, $f(x) \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, c'est-à-dire que $f\left(\left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\right) \subset \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, et le résultat suit par une récurrence immédiate :
  Comme la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ est croissante sur $[-1, +\infty[$, comme $f(-1) = 0$ et comme $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a $f\left(\left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, ce qui prouve l'inclusion voulue. (La dernière inclusion est en fait une égalité car f est continue).

- **Étape 2.** *Si* $u_0 \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$*, alors la suite* (u_n) *est croissante.*

  Pour cela, on montre que $\forall x \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, $f(x) \geq x$, car dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ (notez que cela utilise l'étape 1. pour s'assurer que u_{n+1} est dans le bon intervalle).
  Le résultat est évident si $x \in [-1, 0]$, car $f(x) \geq 0$. Pour $x \geq 0$, on a
  $$\begin{aligned} f(x) \geq x &\iff \sqrt{x+1} \geq x, \\ &\iff x+1 \geq x^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+, \\ &\iff x^2 - x - 1 \leq 0. \end{aligned}$$
  Un polynome de degré 2 à coefficient du terme dominant positif prend des valeurs négatives entre ses racines. Ici, les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (on retrouve l'équation

(1.8)). Donc un réel x satisfait $x^2 - x - 1 \leq 0$ si et seulement si $x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

On conclut que

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \geq x \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

En particulier, cela achève la preuve de l'étape 2.

Les étapes 1. et 2. montrent que si $u_0 \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, alors (u_n) est croissante et majorée $\left(\text{par } \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Donc d'après le théorème 1.4.5, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. Il reste donc à montrer :

- **Étape 3.** *Si* $u_0 \in \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, *alors la suite* (u_n) *converge vers* $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

  En effet, on sait maintenant que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$, et la fonction f est continue sur $[-1, +\infty[$, donc continue en ℓ. Par le corollaire 1.5.5, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Par unicité de la limite (proposition 1.2.4) de la suite de terme général $u_{n+1} = f(u_n)$, on déduit que $f(\ell) = \ell$.

  On a résolu l'équation ci-dessus en montrant que $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule solution qui peut être limite de (u_n). Cela prouve l'étape 3.

Exercice 7. En s'inspirant des étapes ci-dessus, traiter le cas $u_0 \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, en montrant qu'alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$,
2. (u_n) est décroissante,
3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalement, dans cet exemple où la fonction d'itération est $f(x) = \sqrt{1+x}$, on a

$$\forall u_0 \in [-1, +\infty[,\ u_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+u_0}}}}}_{n \text{ racines}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

En ce sens, on peut donner comme réponse à la question 1.6.1 le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Mais attention, on verra en TD qu'en général, le comportement d'une suite récurrente dépend de la valeur initiale u_0.

De l'étude de notre exemple, on extrait la proposition générale suivante :

Proposition 1.6.4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. Soit $J \subset I$ tel que $f(J) \subset J$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente donnée par $u_0 \in J$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Alors*

1. *$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$,*
2. *si, de plus, $\forall x \in J,\ f(x) \geq x$, alors (u_n) est croissante,*
   de même, si $\forall x \in J,\ f(x) \leq x$, alors (u_n) est décroissante.
3. *si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ dans l'adhérence de J, et si l'application f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$.*

Démonstration. **(à savoir faire)** Les deux premiers points se prouvent par récurrence immédiate (écrivez-la !), et montrent que (u_n) est croissante majorée par b. La convergence de (u_n) vers un réel ℓ s'en déduit par le théorème 1.4.5. Pour le troisième point, sachant $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et f continue en ℓ (car f est continue sur I), le corollaire 1.5.5 assure $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Or d'autre part, $f(u_n) = u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ aussi. Par unicité de la limite, on déduit $f(\ell) = \ell$. □

Étude d'un second exemple :

On étudie les suites récurrentes associées à la fonction cosinus. Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $f(x) = \cos x$. Pour $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on considère la suite (u_n) donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \cos u_n.$$

Comme pour le premier exemple, on commence par faire un dessin (figure 1.3), dont l'observation motive les étapes suivantes.

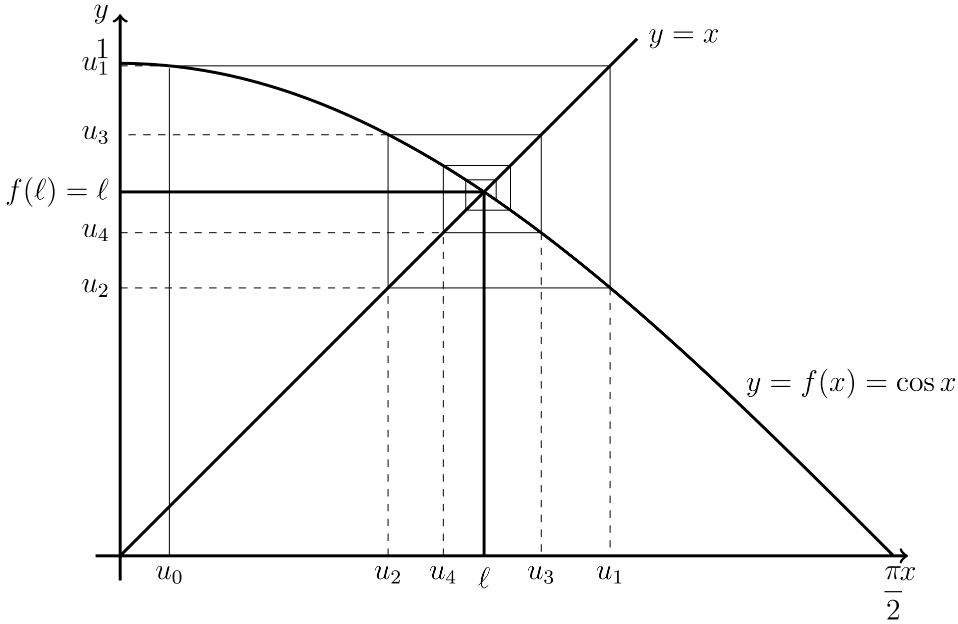


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la suite récurrente associée à $f(x) = \cos(x)$.

- **Étape 0 :** *L'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, que l'on note ℓ.*
  On considère la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x = \cos(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et sa dérivée satisfait $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ g'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$. On en déduit que g est décroissante strictement. D'après le théorème de la bijection réciproque (cf premier semestre), g réalise une bijection décroissante de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[g\left(\dfrac{\pi}{2}\right), g(0)\right] = \left[-\dfrac{\pi}{2}, 1\right]$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$, qui équivaut à $f(x) = x$, admet une unique solution que l'on note $\ell = g^{-1}(0) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
- **Étape 1 :** *Supposons $u_0 \in [0, \ell]$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \in [0, \ell]$.*
  Comme $f = \cos$ est une fonction décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

$$f([0, \ell]) \subset [f(\ell), f(0)] = [\ell, 1] \subset \left[\ell, \frac{\pi}{2}\right] \tag{1.9}$$

$$f\left(\left[\ell, \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\ell)\right] = [0, \ell]. \tag{1.10}$$

  Ces inclusions permettent de montrer par récurrence l'assertion

$$(\mathrm{A}_n) \qquad u_{2n} \in [0, \ell] \text{ et } u_{2n+1} \in \left[\ell, \frac{\pi}{2}\right].$$

  En effet, on a $u_0 \in [0, \ell]$, et par (1.9), $u_1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ce qui démontre (A_0). Supposons maintenant que (A_n) est vraie. Alors en particulier, $u_{2n+1} \in \left[\ell, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc, par (1.10), on a $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \in [0, \ell]$, et aussi $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \in \left[\ell, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par (1.9) ; c'est-à-dire que (A_{n+1}) est vraie. On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, (A_n) est vraie, ce qui valide l'étape 2.
  On pose $v_n = u_{2n}$. La suite (v_n) est récurrente pour la fonction $f \circ f$, avec premier terme $v_0 = u_0$. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n)) = f \circ f(v_n).$$

- **Étape 2 :** *La suite (v_n) est croissante.*
  Il suffit de montrer que $\forall x \in [0, \ell],\ f \circ f(x) \geq x$, car alors l'égalité ci-dessus assure $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f \circ f(v_n) \geq v_n$.
  On introduit la fonction auxiliaire $h(x) = f \circ f(x) - x = \cos(\cos(x)) - x$. Il s'agit de montrer que $\forall x \in [0, \ell],\ h(x) \geq 0$. Or h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée satisfait

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ h'(x) = -(-\sin(x))\sin(\cos(x)) - 1 = \sin(x)\sin(\cos(x)) - 1 < 0.$$

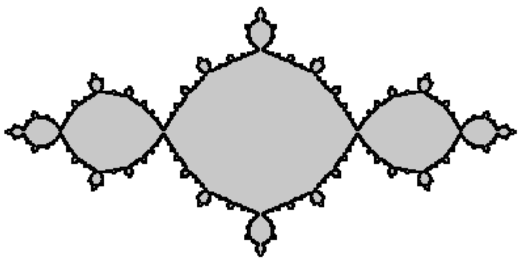
  On a utilisé que $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\sin x| < 1$. Donc la fonction h est décroissante strictement. On en déduit que $\forall x \in [0, \ell],\ h(x) \geq h(\ell) = 0$, car $f(f(\ell)) = f(\ell) = \ell$.

- **Étape 3 :** *La suite* (v_n) *converge vers* ℓ.
  Les deux étapes précédentes montrent que $(v_n) = (u_{2n})$ est croissante et majorée par ℓ. D'après le théorème 1.4.5, on en déduit que (v_n) converge vers un réel inférieur à ℓ. Mais d'après la troisième partie de la proposition 1.6.4, qui s'applique car $f \circ f$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la limite de (v_n) doit être un point fixe de $f \circ f$. C'est donc une solution de l'équation $f(f(x)) = x$, qui équivaut à $h(x) = 0$. Or ℓ est une telle solution, unique par décroissance stricte de h. Ce réel ℓ est donc bien la limite de (v_n).
- **Conclusion :** *La suite* (u_n) *converge vers* ℓ.
  D'après l'étape précédente, (u_{2n}) converge vers ℓ. Par continuité de f, on en déduit $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) = \ell$ en utilisant le corollaire 1.5.5. On verra en section 1.7 que cela garantit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ aussi.

  L'étudiant·e attenti·f·ve aura observé que nous n'avons traité que le cas $u_0 \in [0, \ell]$. À lui ou elle de vérifier que les autres cas s'y ramènent toujours facilement.

Dans les deux exemples présentés dans ces notes, il apparaît que la suite récurrente converge vers la même limite quelle que soit la valeur initiale u_0. Ce phénomène n'est pas vrai en général, comme on le verra en TD. Le comportement asymptotique de la suite dépend a priori fortement de la valeur initiale. On verra aussi en TD des exemples de suites récurrentes qui ne convergent pas, ni n'admettent de limite infinie.

Cette dépendance en la valeur initiale peut être très compliquée. Par exemple, si l'on considère la suite récurrente associée à la fonction complexe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = z^2 - 1$, c'est-à-dire la suite complexe donnée par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 1$, alors l'ensemble des points u_0 du plan complexe pour lesquels la suite (u_n) est bornée (c'est-à-dire que la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires sont toutes deux bornées) est l'ensemble ci-dessous, appelé *ensemble fractal de Julia de paramètre* -1 (l'ensemble de Julia de paramètre $c \in \mathbb{C}$ correspond à $f(z) = z^2 + c$), ou encore *fractale de la basilique*.



1.7 Suites extraites

Exemple 1.7.1. On a vu que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge. Néanmoins, si on considère seulement les termes d'indices pairs, on a $u_{2n} = 1$, donc la suite de terme général

$v_n = u_{2n} = 1$ converge vers 1. De même, la suite de terme général $w_n = u_{2n+1} = -1$ converge vers -1. Les suites (v_n) et (w_n) sont des sous-suites de (u_n), aussi appelées suites extraites de (u_n).

Définitions 1.7.2.

- *On appelle* **extraction** *toute application* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante.*
- *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une extraction. La* **sous-suite de** (u_n) **extraite par** φ *est la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemples 1.7.3.

- Pour $\varphi(n) = n$, qui est bien strictement croissante, on retrouve la suite de départ (u_n), qui est une sous-suite d'elle-même.
- Pour $\varphi(n) = 2n$ qui est bien strictement croissante, on obtient la sous-suite (u_{2n}) des termes d'indice pair.

Proposition 1.7.4. *Soit* $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. *Si* (u_n) *tend vers* ℓ, *alors toute suite extraite* $(u_{\varphi(n)})$ *tend aussi vers* ℓ.

La preuve de la proposition va utiliser le

Lemme 1.7.5. *Si* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une extraction, alors* $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

Démonstration du lemme 1.7.5. **(à savoir faire)**
On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

L'initialisation est claire : $\varphi(0) \geq 0$ car $\varphi(0) \in \mathbb{N}$. Montrons l'hérédité : on suppose que $\varphi(n) \geq n$. Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$. Comme le plus petit entier $> n$ est $n+1$, on en déduit que $\varphi(n+1) \geq n+1$. □

On remarque que la preuve de ce lemme utilise fortement la structure des nombres entiers. Il n'est pas vrai qu'une fonction f strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ satisfait $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq x$. Par exemple, on a $\forall x > 0,\ \log(1+x) < x$, bien que $\log(1+x)$ soit une fonction strictement croissante.

Démonstration de la proposition 1.7.4. **(à savoir faire)**
Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe N tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Mais d'après le lemme 1.7.5, si $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$, donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$. □

Le résultat suivant est un des résultats fondamentaux sur les suites. Il nous permettra par exemple de prouver des résultats essentiels sur les extrema des fonctions réelles à la section 2.4.1.

Théorème 1.7.6 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Soit* $[a, b]$ *un intervalle fermé et borné de* $\mathbb{R}$. *On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a, b]$. *Alors il existe une sous-suite* $(u_{\varphi(n)})$ *qui converge vers un élément* ℓ *de l'intervalle* $[a, b]$.

La preuve est difficile, mais intéressante. Elle repose sur un argument de dichotomie.

Démonstration. On va démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, l'assertion (A_k) suivante est vraie :

$$(\mathrm{A}_k) \quad \exists a_k, b_k \in [a,b],\ \exists N_k \in \mathbb{N} \text{ tels que } \begin{cases} \text{(i)} & a_{k-1} \leq a_k \leq b_k \leq b_{k-1}, \\ \text{(ii)} & b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}, \\ \text{(iii)} & a_k \leq u_{N_k} \leq b_k, \\ \text{(iv)} & N_k > N_{k-1}, \\ \text{(v)} & \text{l'ensemble } \{n > N_k \mid u_n \in [a_k, b_k]\} \text{ est infini.} \end{cases}$$

Admettons-le provisoirement. On observe qu'alors les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet, la croissance de (a_k) et la décroissance de (b_k) découlent de (i), tout comme les inégalités $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq b_k$. Enfin la suite $(b_k - a_k)$ converge bien vers 0 par (ii) car $b-a$ est une constante et (2^k) tend vers $+\infty$. D'après le théorème 1.4.8 des suites adjacentes, on en déduit qu'il existe ℓ dans $[a_0, b_0] = [a,b]$ tel que (a_k) et (b_k) tendent toutes deux vers ℓ.

On définit d'autre part la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\varphi(k) = N_k$. C'est bien une extraction par (iv). Par (iii), on a $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq u_{\varphi(k)} \leq b_k$, et par le théorème des gendarmes, on en déduit que $(u_{\varphi(k)})$ converge aussi vers ℓ (et noter l'indice k ou n ne change rien !).

Notons que, comme $\forall k \in \mathbb{N},\ a \leq u_{\varphi(k)} \leq b$, la proposition 1.4.3 assure également que la limite ℓ de la suite $(u_{\varphi(k)})$ est bien dans $[a,b]$.

Reste à prouver l'assertion par récurrence. On initialise avec $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $N_0 = 0$. Les cinq conditions sont vérifiées (les conditions faisant intervenir l'indice -1 sont dans ce cas vides, donc vérifiées).

Pour l'hérédité, on suppose que (A_k) est vraie. Montrons que (A_{k+1}) s'en déduit. On observe que le réel $\dfrac{a_k+b_k}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[a_k, b_k]$. On distingue deux cas :

Premier cas : Si l'ensemble $G = \left\{n > N_k \mid u_n \in \left[a_k, \dfrac{a_k+b_k}{2}\right]\right\}$ est infini, alors on pose $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \dfrac{a_k+b_k}{2}$ et $N_{k+1} = \min G$. Les conditions (i), (iii), (iv) et (v) sont alors clairement satisfaites. Pour (ii), il suffit de faire le calcul

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2} - a_k = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k \cdot 2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

Second cas : Si l'ensemble G est fini, alors l'ensemble $D = \left\{n > N_k \mid u_n \in \left[\dfrac{a_k+b_k}{2}, b_k\right]\right\}$ est infini. En effet, l'ensemble $G \cup D = \{n > N_k \mid u_n \in [a_k, b_k]\}$ est infini par (v). On pose alors $a_{k+1} = \dfrac{a_k+b_k}{2}$, $b_{k+1} = b_k$ et $N_{k+1} = \min D$. Les conditions (i), (iii), (iv) et (v) sont encore satisfaites, tout comme (ii) par un calcul similaire.

Dans tous les cas, l'assertion (A_k) implique bien l'assertion (A_{k+1}). $\square$

Ce résultat appelle la définition suivante :

Définition 1.7.7. *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que le réel ℓ est une* **valeur d'adhérence** *de la suite (u_n) s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers ℓ.*

Avec la notion de valeur d'adhérence, le théorème de Bolzano-Weierstrass peut être reformulé sous la forme du

Corollaire 1.7.8. *Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.*

Exemple 1.7.9. Les réels 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. En effet, $u_{2n} \to 1$ et $u_{2n+1} \to -1$. On pourra montrer à titre d'exercice que ce sont les deux seules valeurs d'adhérence de cette suite.

On rappelle la définition de la notion de point adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$: le réel x est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |a - x| \leq \varepsilon$. Ces deux notions d'adhérence sont cohérentes comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 8. On va construire une suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est l'intervalle $[0, 1]$. Auparavant, on présente quelques rappels du premier semestre sur les développements décimaux des nombres réels.

Tout réel $x \in [0, 1[$ admet un développement décimal unique noté

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

où $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, et la suite $(d_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire de limite 9 (c'est cette dernière condition qui assure l'unicité du développement). On rappelle qu'un nombre réel est dit *décimal* si la suite (d_i) de ses décimales est stationnaire de limite 0.

Pour un entier $k \geq 0$, la troncature du développement de x à la $k^{\text{ième}}$ décimale est le réel noté $t_k(x)$ dont le développement décimal est obtenu en remplaçant d_i par 0 pour tout $i \geq k + 1$:

$$t_k(x) = 0, d_1 d_2 \ldots d_k 0000 \ldots, \text{ qu'on note plus souvent } t_k(x) = 0, d_1 d_2 \ldots d_k.$$

On a, pour tout $x \in [0, 1[$ et pour tout entier $k \geq 0$,

$$0 \leq x - t_k(x) < 0, \underbrace{000 \ldots 0}_{k-1 \text{ zéros}} 1 = 10^{-(k-1)}.$$

Du théorème des gendarmes, on déduit que pour tout $x \in [0, 1[$, la suite $(t_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ des troncatures converge vers le réel x.

Remarque 1.7.10. On peut réécrire une troncature de développement décimal comme suit :

$$t_k(x) = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots d_k = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{d_3}{1000} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i}{10^i}.$$

Par convergence des troncatures, on écrira

$$x = \lim_{k \to \infty} t_k(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{d_i}{10^i}.$$

On définit maintenant une suite réelle (u_n) dont l'ensemble des valeurs d'adhérences est l'intervalle $[0,1]$. La suite (u_n) est la liste de tous les développements décimaux tronqués de l'intervalle $[0,1[$ ordonnée comme suit :

$$
\begin{array}{llllll}
u_0 = 0 & u_1 = 0,0 & u_{11} = 0,00 & u_{111} = 0,000 & u_{1111} = 0,0000 & \vdots \\
 & u_2 = 0,1 & u_{12} = 0,01 & u_{112} = 0,001 & \vdots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & u_{10} = 0,9 & u_{20} = 0,09 & u_{120} = 0,009 & \vdots & \vdots \\
 & & u_{21} = 0,10 & u_{121} = 0,010 & \vdots & \vdots \\
 & & u_{22} = 0,11 & u_{122} = 0,011 & \vdots & \vdots \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & u_{110} = 0,99 & u_{210} = 0,099 & \vdots & \vdots \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & u_{1110} = 0,999 & \vdots & \vdots \\
 & & & & \vdots & \vdots \\
 & & & & u_{11110} = 0,9999 & \vdots
\end{array}
$$

(On remarque ici qu'une définition formelle n'aurait d'autre effet que d'embrouiller l'étudiant·e. Le formalisme est utile en ce qu'il aide à la compréhension, pas comme fin en soi !)

Soit maintenant $x \in [0,1[$. Montrons que x est une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Pour cela, on observe que pour tout entier $k \geq 0$, la troncature $t_k(x)$ de x à la $k^{\text{ième}}$ décimale apparaît dans la suite (u_n), donc il existe un entier N_k (qui dépend de x) tel que $u_{N_k} = t_k(x)$. On pose alors $\varphi(k) = N_k$, qui définit bien une extraction (qui dépend de x !) et on a

$$u_{\varphi(k)} = u_{N_k} = t_k(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

Cela montre bien que x est valeur d'adhérence de (u_n).

Si $x = 1$, la sous-suite $u_{10} = 0,9$ puis $u_{110} = 0,99$ puis $u_{1110} = 0,999$ etc converge bien vers 1.

Finalement, tout réel de l'intervalle $[0,1]$ est une valeur d'adhérence de (u_n). Il n'y en a pas d'autre en vertu de l'exercice suivant.

Exercice 9. Soient (u_n) une suite réelle et $[a,b]$ un intervalle fermé borné tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a,b]$. Alors toute valeur d'adhérence de (u_n) est dans $[a,b]$.

1.8 Limites inférieures, limites supérieures

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **majorée**. On considère la suite $(\bar{u}_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \bar{u}_n = \sup\{u_p \mid p \geq n\} = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \geq n,\ u_p = x\}.$$

La borne supérieure de la partie $\{u_p \mid p \geq n\}$ existe bien, en vertu de la propriété fondamentale 1.4.2 de $\mathbb{R}$, car cette partie est non-vide (elle contient u_n par exemple) et majorée (puisque la suite (u_n) l'est). La suite $(\bar{u}_n)$ satisfait la proposition suivante :

Proposition 1.8.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite majorée. Alors la suite $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus tend vers une limite $\bar{\ell} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Démonstration. **(à savoir faire)** Il suffit de vérifier que la suite $(\bar{u}_n)$ est décroissante, car alors, en vertu du corollaire 1.4.6 au théorème des suites croissantes, elle est convergente si minorée et tend vers $-\infty$ si elle est non-minorée. Or on a l'inclusion des ensembles

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \{u_p \mid p \geq n+1\} \subset \{u_p \mid p \geq n\},$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \bar{u}_{n+1} = \sup\{u_p \mid p \geq n+1\} \leq \sup\{u_p \mid p \geq n\} = \bar{u}_n.$$

□

Cette proposition appelle la définition suivante :

Définition 1.8.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

- *Si (u_n) est majorée, alors on appelle* **limite supérieure** *de la suite (u_n) la limite $\bar{\ell} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de la suite $(\bar{u}_n)$ définie ci-dessus. On note $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \bar{\ell}$.*
- *Si (u_n) est non-majorée, alors, par convention, $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

Cette convention est cohérente avec l'idée intuitive que la borne supérieure d'une partie non-bornée (chose qui n'existe pas) devrait être « infinie ». On rappelle ici que $+\infty$ et $-\infty$ n'existent pas par eux-mêmes et sont simplement des notations pratiques pour des énoncés sur des comportements asymptotiques de suites ou de fonctions.

On définit de manière symétrique la notion de limite inférieure. Soit (u_n) une suite réelle **minorée**. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underline{u}_n = \inf\{u_p \mid p \geq n\}.$$

Cette suite est bien définie (justifiez !) et croissante (prouvez-le !). Elle admet donc une limite $\underline{\ell} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 1.8.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

- *Si (u_n) est minorée, alors on appelle* **limite inférieure** *de la suite (u_n) la limite $\underline{\ell} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de la suite $(\underline{u}_n)$ définie ci-dessus. On note $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \underline{\ell}$.*
- *Si (u_n) est non-minorée, alors par convention $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Exemple 1.8.4. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \bar{u}_n = \sup\{(-1)^p \mid p \geq n\} = 1, \qquad \text{donc } \bar{u}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underline{u}_n = \sup\{(-1)^p \mid p \geq n\} = -1, \quad \text{donc } \underline{u}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Ceci démontre que $\limsup\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = 1$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} (-1)^n = -1$.

On observe que les seules suites à avoir à la fois une limite supérieure et une limite inférieure réelles sont les suites bornées.

On a toujours :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ \underline{u}_n = \inf\{u_p \mid p \geq n\} \leq u_k \leq \sup\{u_p \mid p \geq n\} \leq \bar{u}_n. \tag{1.11}$$

On en déduit les propositions suivantes :

Proposition 1.8.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Toute valeur d'adhérence ℓ de (u_n) satisfait*

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \ell \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$$

Démonstration. **(à savoir faire)** On donne la preuve dans le cas où (u_n) est bornée. Le cas où (u_n) est non-majorée (resp. non-minorée) se traite de manière similaire, sachant qu'alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) par convention.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de (u_n). D'après la définition 1.7.7, il existe une extraction φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ. On utilise (1.11) avec $k = \varphi(n) \geq n$ (voir le lemme 1.7.5 d'extraction), qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underline{u}_n \leq u_{\varphi(n)} \leq \bar{u}_n.$$

Les trois suites sont convergentes et, à la limite, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \underline{u}_n \leq \ell \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \bar{u}_n$, qui est l'inégalité demandée. □

Théorème 1.8.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On note $\mathcal{VA}(u_n)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Alors*

- *la limite supérieure $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ de la suite (u_n) est le maximum de $\mathcal{VA}(u_n)$,*
- *la limite inférieure $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ de la suite (u_n) est le minimum de $\mathcal{VA}(u_n)$.*

Le théorème énonce en particulier que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée admet un maximum (= plus grand élément) et un minimum (= plus petit élément).

Remarque 1.8.7. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et elle admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$. De même, si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, et elle admet une sous-suite qui tend vers $-\infty$. Ces résultats sont similaires au théorème 1.8.6, mais bien sûr ni $+\infty$, ni $-\infty$ ne sont des valeurs d'adhérence (ce ne sont même pas des réels !).

Démonstration. On prouve l'énoncé pour la limite supérieure. Celui pour la limite inférieure et similaire.

D'après la proposition 1.8.5, le réel $\bar{\ell} = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \bar{u}_n$ est un majorant de l'ensemble $\mathcal{VA}(u_n)$ des valeurs d'adhérence de (u_n). Pour en déduire que c'est son maximum, il suffit donc de voir que $\bar{\ell} \in \mathcal{VA}(u_n)$, c'est-à-dire que $\bar{\ell}$ est une valeur d'adhérence de (u_n).

Par définition de la limite supérieure, on sait que $\bar{u}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\ell}$, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \bar{\ell} - \varepsilon \leq \bar{u}_n = \sup\{u_p \mid p \geq n\} \leq \bar{\ell} + \varepsilon.$$

En particulier, de l'encadrement du sup par des inégalités **strictes** (voir remarque 1.8.8 ci-dessous), on déduit l'existence d'un entier $p \geq n$ tel que $\bar{\ell} - 2\varepsilon \leq u_p \leq \bar{\ell} + 2\varepsilon$. En résumé, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ |u_p - \bar{\ell}| \leq 2\varepsilon. \tag{1.12}$$

(Noter la disparition du N, car si $n < N$, on peut trouver un entier p pour N qui « conviendra » aussi pour n.)

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on construit par récurrence une suite d'entiers naturels $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant l'assertion :

$$(\mathrm{A}_k) \quad p_{k-1} < p_k \text{ et } |u_{p_k} - \bar{\ell}| < \frac{1}{k}.$$

Initialisation : pour $k = 1$, on applique (1.12) avec $\varepsilon = 1$ et $n = 0$. On obtient l'existence de $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{p_1} - \bar{\ell}| < 1$.

Hérédité : supposons (A_k) vérifiée. On applique alors (1.12) avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2(k+1)}$ et $n = p_k+1 > p_k$. Cela garantit l'existence d'un entier $p_{k+1} \geq n > p_k$ tel que $|u_{p_{k+1}} - \bar{\ell}| \leq 2\varepsilon = \dfrac{1}{k+1}$, ce qui prouve $(\mathrm{A})_{k+1}$.

On a donc construit par récurrence une suite d'entiers (p_k) telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_{k-1} < p_k \text{ et } |u_{p_k} - \bar{\ell}| \leq \frac{1}{k}.$$

On définit alors $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ par $\varphi(k) = p_k$. C'est bien une extraction, et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \bar{\ell} - \frac{1}{k} \leq u_{\varphi(k)} \leq \bar{\ell} + \frac{1}{k}.$$

Comme $\bar{\ell} - \dfrac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\ell}$ et $\bar{\ell} + \dfrac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\ell}$, on déduit du théorème des gendarmes que $u_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\ell}$.

Ainsi, $\bar{\ell} = \limsup_{n\to+\infty} u_n$ est bien une valeur d'adhérence de (u_n). $\square$

Remarque 1.8.8. Au début de la preuve ci-dessus, on a utilisé la propriété suivante d'une partie non-vide majorée A de $\mathbb{R}$:

$$x = \sup A \iff \left\{ \begin{array}{ll} & \forall a \in A,\ a \leq x \\ \text{et} & \forall y < x,\ \exists a \in A,\ y \leq a \end{array} \right.$$

pour $x = \sup\{u_p \mid p \geq n\}$ et $y = \bar{\ell} - 2\varepsilon$.

Remarque 1.8.9. Dans la preuve précédente, on a montré directement à partir de la définition de limite supérieure que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une valeur d'adhérence de (u_n). En particulier, cela fournit une deuxième preuve du théorème 1.7.6 de Bolzano-Weierstrass qui assure l'existence d'au moins une valeur d'adhérence pour toute suite bornée.

Corollaire 1.8.10. *Soit* (u_n) *une suite réelle bornée. On a*

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Démonstration. Supposons $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \underline{u}_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \bar{u}_n = \ell$. Alors (1.11) (pour $k = n$) et le théorème des gendarmes montrent que (u_n) converge vers ℓ.

Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Alors la proposition 1.7.4 assure que pour toute extraction φ, la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, c'est-à-dire que $\mathcal{VA}(u_n) = \{\ell\}$. Le théorème 1.8.6 assure que la limite supérieure (resp. inférieure) de (u_n) est le maximum (resp. minimum) de cet ensemble $\mathcal{VA}(u_n) = \{\ell\}$. C'est donc ℓ. $\square$

Dans le corollaire 1.8.10, la limite ℓ est forcément réelle car (u_n) est bornée. La généralisation au cas non-bornée est l'objet de l'exercice suivant :

Exercice 10. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que

1. $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,
2. $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1.9 Suites de Cauchy

Définition 1.9.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On dit que* (u_n) *est de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon. \tag{1.13}$$

Cette définition est à comparer avec la définition de suite convergente. Une suite est de Cauchy si pour toute précision $\varepsilon > 0$ requise, il existe un rang N à partir duquel deux termes quelconques de la suite diffèrent d'au plus ε.

Un premier exemple de suite de Cauchy est donné par la proposition suivante.

Proposition 1.9.2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Si* (u_n) *converge, alors* (u_n) *est de Cauchy.*

Démonstration. **(à savoir faire)** Si (u_n) converge, alors il existe un réel ℓ tel que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon. \tag{1.14}$$

Montrons qu'alors (u_n) est de Cauchy. <u>Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire.</u> On utilise (1.14) pour $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Cela fournit <u>$N \in \mathbb{N}$</u> tel que <u>$\forall p, q \geq N$</u>, $|u_p - \ell| \leq \varepsilon'$ et $|u_q - \ell| \leq \varepsilon'$. Mais alors on a :

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - \ell + \ell - u_q| \\ &\leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon'. \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\underline{|u_p - u_q| \leq \varepsilon}$. $\square$

Cette proposition permet de démontrer facilement que certaines suites divergent :

Exercice 11. Redémontrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge en montrant qu'elle n'est pas de Cauchy.

En fait, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, les suites de Cauchy sont exactement les suites convergentes. C'est l'objet du

Théorème 1.9.3. *Soit (u_n) une suite réelle. Alors (u_n) converge si et seulement si (u_n) est de Cauchy.*

Ce théorème est très utile. Il permet de démontrer la convergence de suites sans connaître leur limite. Sa démonstration utilise le lemme suivant :

Lemme 1.9.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si (u_n) est de Cauchy, alors (u_n) est bornée.*

Démonstration du lemme 1.9.4. **(à savoir faire)** On utilise (1.13) pour $\varepsilon = 1$. On en déduit l'existence de N dans $\mathbb{N}$ tel que, en particulier, $\forall p \geq N,\ |u_p - u_N| \leq 1$. On a alors

$$\forall p \geq N,\ |u_p| = |u_p - u_N + u_N| \leq |u_p + u_N| \leq 1 + |u_N|.$$

où l'on a aussi utilisé l'inégalité triangulaire. Cela montre que la suite (u_n) est bornée à partir du rang N. Elle est donc bornée sur $\mathbb{N}$ par le nombre réel suivant :

$$C = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|).$$

Comme cet ensemble est fini, son maximum existe bien. On a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C$. $\square$

Démonstration du théorème 1.9.3. On a vu à la proposition 1.9.2 que toute suite convergente est de Cauchy. Reste à démontrer la réciproque.

On considère une suite (u_n) de Cauchy. Il s'agit de montrer que (u_n) converge.

D'après le lemme 1.9.4, la suite (u_n) est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $C \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-C, C]$. On peut donc appliquer à (u_n) le théorème 1.7.6 de Bolzano-Weierstrass, qui assure qu'une sous-suite converge, c'est-à-dire qu'il existe une extraction φ et un réel $\ell \in [-C, C]$ tels que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

Reste à voir qu'en fait la suite toute entière (u_n) converge vers ℓ, et pas seulement cette sous-suite. On considère donc $\varepsilon > 0$ arbitraire.

On utilise le fait que (u_n) est de Cauchy avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ pour déduire l'existence d'un entier N_1 tel que

$$\forall p, q \geq N_1,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon'. \tag{1.15}$$

D'autre part, on utilise la convergence de $(u_{\varphi(n)})$ vers ℓ pour déduire l'existence d'un entier N_2 tel que

$$\forall n \geq N_2,\ |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon'. \tag{1.16}$$

On pose alors $N = \max(N_1, N_2)$. On rappelle que, par le lemme 1.7.5, on a $\varphi(N) \geq N$. Maintenant :

$$\begin{aligned}
\forall p \geq N,\ |u_p - \ell| &= |u_p - u_{\varphi(N)} + u_{\varphi(N)} - \ell| \\
&\leq |u_p - u_{\varphi(N)}| + |u_{\varphi(N)} - \ell| \text{ par inégalité triangulaire,} \\
&\leq \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon' = \varepsilon \text{ par (1.15) et (1.16).}
\end{aligned}$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N, |u_p - \ell| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que (u_n) converge vers ℓ. □

Remarque 1.9.5. L'énoncé du théorème 1.9.3 n'est pas vrai pour les suites rationnelles (à valeurs dans $\mathbb{Q}$). En effet, si on prend la suite $(t_k(\sqrt{2}))_{k\in\mathbb{N}}$ des troncatures du développement décimal de $\sqrt{2}$, c'est une suite de rationnels qui converge dans $\mathbb{R}$, donc qui est de Cauchy, mais dont la limite $\sqrt{2}$ n'est pas rationnelle. Cette suite ne converge donc pas dans $\mathbb{Q}$.

D'ailleurs, l'étudiant·e attenti·f·ve aura remarqué que le théorème 1.9.3 utilise le théorème 1.7.6 de Bolzano-Weierstrass, qui repose sur le théorème 1.4.8 des suites adjacentes, qui repose lui-même sur le théorème 1.4.5 de convergence des suites croissantes majorées, qui repose enfin sur la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, à savoir l'existence d'une borne supérieure pour toute partie non-vide majorée.

Application : le théorème du point fixe des applications contractantes.

Définition 1.9.6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est* **contractante** *si*

$$\exists K \in [0, 1[,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \tag{1.17}$$

Exercice 12. Montrer que si f est contractante, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

On se propose d'utiliser les suites de Cauchy et les suites récurrentes pour démontrer le

Théorème 1.9.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application contractante, alors f admet un unique point fixe (c'est-à-dire que l'équation $f(\ell) = \ell$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}$).*

Démonstration. On montre d'abord l'unicité. Supposons que $f(\ell_1) = \ell_1$ et $f(\ell_2) = \ell_2$. Alors on déduit de (1.17) que

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leq K|\ell_1 - \ell_2|,$$

d'où $(1 - K)|\ell_1 - \ell_2| \leq 0$. Comme $1 - K > 0$, cela force $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, soit $\ell_1 = \ell_2$, ce qui prouve l'unicité.

Montrons maintenant l'existence. Pour cela, on considère une suite récurrente, donnée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

En appliquant (1.17) avec $x = u_{n+1}$ et $y = u_n$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K|u_{n+1} - u_n|.$$

Par une récurrence immédiate (écrivez-la !), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|. \tag{1.18}$$

On montre maintenant que la suite (u_n) est de Cauchy. Pour cela, on considère $\varepsilon > 0$ arbitraire. On observe d'abord que, comme $|K| < 1$, la suite $\left(\dfrac{K^{n+1}}{1-K}|u_1 - u_0|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{K^{N+1}}{1-K}|u_1 - u_0| < \varepsilon$.

Soient maintenant $p, q \geq N$. Par symétrie, on peut supposer que $p \geq q$. On a alors

$$\begin{aligned}
|u_p - u_q| &= |(u_p - u_{p-1}) + (u_{p-1} - u_{p-2}) + \cdots + (u_{q+1} - u_q)| \\
&\leq |u_p - u_{p-1}| + |u_{p-1} - u_{p-2}| + \cdots + |u_{q+1} - u_q| \text{ par inégalités triangulaires,} \\
&\leq (K^{p-1} + K^{p-2} + \cdots + K^{q+1})|u_1 - u_0| \text{ par (1.18),} \\
&= K^{q+1}(K^{p-q-1} + \cdots + K + 1)|u_1 - u_0| \\
&= K^{q+1}\left(\frac{1 - K^{p-q}}{1-K}\right)|u_1 - u_0| \text{ par somme d'une suite géométrique,} \\
&\leq K^{q+1}\frac{1}{1-K}|u_1 - u_0| \leq K^{N+1}\frac{1}{1-K}|u_1 - u_0| < \varepsilon \text{ par choix de } N,
\end{aligned}$$

ce qui montre que (u_n) est de Cauchy.

D'après le théorème 1.9.3, on en déduit que (u_n) converge, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Mais alors on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et comme f est continue d'après l'exercice 12, on a aussi $u_{n+1} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Par unicité de la limite de la suite (u_{n+1}), on a $f(\ell) = \ell$. Donc f admet bien un point fixe. $\square$

En fait, les suites de Cauchy peuvent être utilisées pour définir l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. Pour cela :

(a) On considère l'ensemble $\mathcal{R}$ des suites de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$, et on quotiente par la relation d'équivalence définie par $(u_n) \sim (v_n) \iff v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient alors un ensemble, noté $\mathbb{R}$, dont les éléments sont des classes d'équivalences de suites de Cauchy de rationnels !

(b) Les opérations d'addition et multiplication se définissent sur les représentants de ces classes par addition et multiplication des suites terme à terme. Il faut alors montrer que cela ne dépend pas du choix des représentants.

(c) De même, on définit la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en disant que la classe de (u_n) est $<$ à la classe de (v_n) s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ u_n < v_n$. Il faut encore montrer que cela ne dépend pas du choix des représentants.

(d) Il faut encore montrer que l'on retrouve $\mathbb{Q}$ comme une partie de $\mathbb{R}$ (ce sont les classes représentées par une suite constante).

(e) Enfin, il faut montrer que la propriété fondamentale 1.4.2 est vraie dans cet ensemble $\mathbb{R}$.

Faire tout cela en détail n'est pas une partie de plaisir, et finalement peu instructif. Par contre, il est très intéressant de savoir que ce procédé, dit de *complétion*, peut être reproduit dans bien d'autres contextes. Par exemple, on verra en L3 qu'on peut interpréter l'espace $L^1[0,1]$ des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[0,1]$ comme le complété de l'espace $C^0[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$ pour la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1.10 Rudiments de topologie de $\mathbb{R}$

On ne cherche pas en L1 à définir la notion de topologie, qui sera l'objet d'un cours complet de L3. On se contente ici simplement d'étudier certaines propriétés des parties de $\mathbb{R}$. Il sera instructif de relire cette section lors du cours de topologie en L3, afin de comparer ce qui est spécifique à l'ensemble $\mathbb{R}$ et ce qui se généralise à d'autres espaces topologiques.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in A$.

1.10.1 Parties fermées, parties complètes

Définition 1.10.1. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite* **fermée** *(on dit aussi que A est un* **fermé** *de $\mathbb{R}$) si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A convergente, la limite de (u_n) est dans A.*

Exemples 1.10.2.

- Soit $b \in \mathbb{R}$. L'intervalle $A_1 =]-\infty, b]$ est fermé.
  En effet, supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in A_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le b$ et par passage à la limite (proposition 1.4.3), on déduit $\ell \le b$, c'est-à-dire $\ell \in A_1$.
- L'intervalle $A_2 =]0,1]$ n'est pas fermé.
  En effet, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\ge1}$ d'éléments de A_2 converge vers 0 qui n'est pas dans A_2.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est pas fermé.
  En effet, la suite $(t_n(\sqrt{2}))$ des troncatures décimales de $\sqrt{2}$ est bien une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2}$, et $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.10.3. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A. Alors A est fermée si et seulement si $A = \bar{A}$.*

Démonstration. **(à savoir faire)** Supposons d'abord A fermée. On a toujours $A \subset \bar{A}$. Reste à voir que $\bar{A} \subset A$. Or, si $x \in \bar{A}$, alors par la proposition 1.5.1, il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Comme A est fermée, on en déduit que $x \in A$.

Supposons maintenant que A n'est pas fermée. Alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers une limite $\ell \notin A$. Mais, par la proposition 1.5.1, $\ell \in \bar{A}$. Donc $A \neq \bar{A}$. □

La notion de partie fermée est à distinguer de la notion suivante :

Définition 1.10.4. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite* **complète** *(ou que A est un* **complet** *de $\mathbb{R}$) si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge vers une limite dans A.*

Le théorème 1.9.3 assure que $\mathbb{R}$ est une partie complète de $\mathbb{R}$. Plus généralement, les parties complètes de $\mathbb{R}$ coïncident avec les parties fermées d'après la proposition suivante. Cela n'est plus vrai dans d'autres espaces.

Proposition 1.10.5. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est complète si et seulement si A est fermée.*

Démonstration. Supposons A complète. Soit (u_n) une suite d'éléments de A convergente. Alors (u_n) est de Cauchy, donc converge dans A (puisque A est complète). Donc A est fermée.

Réciproquement, supposons A fermée. Soit (u_n) une suite de Cauchy d'éléments de A. Alors (u_n) est convergente (dans $\mathbb{R}$), donc convergente dans A (puisque A est fermée). Donc A est complète. $\square$

La *complétude* est une des propriétés essentielles de $\mathbb{R}$. Par exemple, c'est cette propriété qu'on utilise pour définir correctement les fonctions logarithme et exponentielle (et par conséquent aussi les fonctions trigonométriques). En effet :

- si on choisit de définir $\ln$ comme la primitive de $\dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1 (et $\exp$ comme sa réciproque), cette primitive se définit à l'aide d'une intégrale, et une intégrale est la limite des sommes de Riemman (à voir en L2). Cette limite existe car les sommes de Riemman forment des suites de Cauchy et car $\mathbb{R}$ est complet.
- si, de manière équivalente, on choisit plutôt de définir $\exp$ comme l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ valant 1 en 0 (et $\ln$ comme sa réciproque), on utilise encore le critère de Cauchy. Il est intéressant de noter qu'il s'agit là de l'approche originale de Cauchy, qui a défini ce critère pour montrer l'existence de solutions à des équations différentielles (voir le théorème de Cauchy-Lipschitz en L3).

1.10.2 Parties ouvertes

Définition 1.10.6. *Soit U une partie de $\mathbb{R}$. On dit que U est* **ouverte** *(ou que U est un* **ouvert** *de $\mathbb{R}$) si*

$$\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U.$$

Exemples 1.10.7.

- $\mathbb{R}$ est ouverte (il suffit de prendre $\varepsilon = 1$).
- L'intervalle $]0, +\infty[$ est ouvert. En effet, si $x \in]0, +\infty[$, alors, pour $\varepsilon = \dfrac{x}{2} > 0$, on a $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \left]\dfrac{x}{2}, \dfrac{3x}{2}\right[\subset]0, +\infty[$.
- L'intervalle $[0, 1[$ n'est pas ouvert. En effet, pour $x = 0$, quel que soit $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ contient des réels strictement négatifs, donc n'est pas inclus dans $[0, 1[$.

Exercice 13. Donner un exemple de partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni ouverte, ni fermée.

Exercice 14. Montrer qu'un intervalle ouvert est un ouvert, et qu'un intervalle fermé est un fermé. Quels sont les intervalles à la fois ouverts et fermés ?

Proposition 1.10.8. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors*

$$A \text{ est fermée} \iff \mathbb{R} \setminus A \text{ est ouverte.}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathbb{R} \setminus A$ est une partie ouverte. Montrons que A est fermée. Pour cela, on considère une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que $\ell \in A$. On procède par l'absurde. Si ℓ n'était pas dans A, alors il serait dans $\mathbb{R} \setminus A$ qui est ouverte, donc il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset \mathbb{R} \setminus A$, et donc aucun élément de $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ ne serait dans A. Or, comme $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe un entier N tel que $\forall n \geq N,\ a_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et $a_n \in A$. C'est une contradiction. Cela montre que la limite ℓ est bien dans A.

Pour la réciproque, on procède par contraposée en supposant que $\mathbb{R} \setminus A$ n'est pas ouverte. Il existe alors $x \in \mathbb{R} \setminus A$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R} \setminus A$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément a qui est dans A (le complémentaire de $\mathbb{R} \setminus A$) et tel que $|x - a| < \varepsilon$. En particulier, cet x est adhérent à A. Au total, on a $x \in \bar{A}$ et $x \notin A$. Donc $\bar{A} \neq A$. D'après la propositon 1.10.10, on conclut que A n'est pas fermée. $\square$

1.10.3 Parties compactes

Définition 1.10.9. *Soit K une partie de $\mathbb{R}$. On dit que K est* **compacte** *(ou que K est un* **compact** *de $\mathbb{R}$) si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K, il existe $\ell \in K$ et une extraction φ telles que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.*

Par exemple, le théorème 1.7.6 de Bolzano-Weiertrass énonce que les intervalles fermés bornés sont compacts. Plus généralement, on a :

Proposition 1.10.10. *Soit K une partie de $\mathbb{R}$. Alors K est compacte si et seulement si K est fermée et bornée.*

Démonstration. Supposons d'abord K compacte. Montrons que K est fermée. Soit (a_n) une suite d'éléments de K qui converge vers un réel ℓ. Il s'agit de montrer que $\ell \in K$. Or, par compacité, il existe $\ell' \in K$ et une extraction φ telles que $a_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Mais alors $\ell = \ell'$, car une suite convergente a pour unique valeur d'adhérence sa limite (proposition 1.7.4).

Montrons maintenant que K est bornée. Supposons par l'absurde que K est non-bornée. Alors elle est non-majorée ou non-minorée. Si elle est non-majorée, alors il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers $+\infty$, et alors toutes ses sous-suites tendent aussi vers $+\infty$, donc aucune sous-suite ne peut converger. Cela contredit la compacité. Le cas d'une suite non-minorée se traite de la même manière.

Supposons maintenant K fermée et bornée. Montrons qu'elle est compacte. Pour cela, on considère une suite (a_n) de K. Cette partie étant bornée, il existe $C \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [-C, C]$. Le théorème 1.7.6 de Bolzano-Weierstrass assure alors qu'il existe une extraction φ et $\ell \in [-C, C]$ tels que $a_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Mais comme $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{\varphi(n)} \in A$, on en déduit par fermeture que $\ell \in K$. $\square$

Chapitre 2

Étude locale de fonctions réelles

2.1 Comparaison locale et comparaison asymptotique

2.1.1 Notion de voisinage

Définition 2.1.1. *Soit U une partie de $\mathbb{R}$.*

- *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que U est un* **voisinage de** x_0 *si*

$$\exists \alpha > 0,\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset U.$$

- *On dit que U est un* **voisinage de** $+\infty$ *si*

$$\exists A \in \mathbb{R},\ ]A, +\infty[\subset U.$$

- *On dit que U est un* **voisinage de** $-\infty$ *si*

$$\exists B \in \mathbb{R},\ ]-\infty, B[\subset U.$$

Exemples 2.1.2.

- Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. L'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ est un voisinage de x_0.
- Soit $A \in \mathbb{R}$. L'intervalle $]A, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
- Soit $B \in \mathbb{R}$. L'intervalle $]-\infty, B[$ est un voisinage de $-\infty$.

Les voisinages des exemples 2.1.2 sont appelés les **voisinages de base** de x_0, $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

Il y a bien sûr beaucoup d'autres voisinages. Par exemple, $]-\infty, -5] \cup \mathbb{N}$ est un voisinage de $-\infty$ (mais pas de $+\infty$), et $\mathbb{Z} \cup \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$ (pour quels α ?), mais il nous suffira en général d'utiliser les voisinages de base.

Exercice 15. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient U_1 et U_2 deux voisinages de x_0. Montrer que $U_1 \cap U_2$ et $U_1 \cup U_2$ sont aussi des voisinages de x_0.

Cette notion de voisinage est utile, car elle permet de reformuler la définition de limite sans avoir à distinguer entre les cas réels ou infinis.

Proposition 2.1.3. *Soient f une fonction réelle et $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que x_0 est adhérent au domaine de définition D_f de f. Alors la limite de f en x_0 est ℓ si et seulement si, pour tout voisinage U de ℓ, il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(V) \subset U$.*

On peut aussi retrouver dans ce contexte les limites à droite, les limites à gauche ou les limites épointées en $x_0 \in \mathbb{R}$ vues au premier semestre. Pour cela, il suffit de demander en plus que V soit un voisinage à droite (resp. à gauche, resp. épointé) de x_0, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0, x_0 + \alpha] \subset V$ (resp. $]x_0 - \alpha, x_0] \subset V$, resp. $]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[\subset V$).

Démonstration. On donne les éléments de la preuve dans le cas où x_0 et ℓ sont tous deux réels. L'étudiant·e est invité·e à réfléchir aux huit autres cas.

D'après la définition 2.1.1, U est un voisinage de x_0 si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset U$, et V est un voisinage de ℓ si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que $]\ell - \delta, \ell + \delta[\subset V$.

Or, d'après la définition du premier semestre, on sait que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[,$$

c'est-à-dire que, pour tout voisinage de base U' de ℓ, il existe un voisinage de base V' de x_0 tel que $f(V') \subset U'$.

La proposition se déduit aisément de ces deux observations. □

Les résultats des sections 1.3 et 1.4 concernant les suites ont tous des analogues évidents concernant les fonctions. En général, il suffit de remplacer « $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N$ » par « $\exists U$ voisinage de $x_0,\ \forall x \in U$ ». L'étudiant·e est invité·e à relire ces sections en cherchant à adapter les résultats concernant les suites aux fonctions réelles.

2.1.2 Notion de « petit-o »

Définition 2.1.4. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage V de x_0. On dit que f est* **négligeable devant** g **au voisinage de** x_0 *et on note $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$ ou $f = \underset{x \to x_0}{o}(g)$ (qu'on lit « f est un petit-o de g en x_0 ») s'il existe un voisinage $U \subset V$ de x_0 et une fonction $r : U \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in U,\ f(x) = r(x)g(x) \quad \text{et} \quad r(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, si la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage U de x, alors la fonction f est négligeable devant g au voisinage de x_0 lorsque le ratio $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 en x_0.

La formulation de la définition est un peu plus compliquée, car il faut tenir compte du fait que la fonction g peut s'annuler. Notez qu'on autorise le voisinage U à être plus petit que V.

Remarque 2.1.5. Il nous arrivera d'étudier aussi des fonctions non définies en x_0 (par exemple la fonction $\frac{1}{x}$ avec $x_0 = 0$). La définition 2.1.4 s'adapte immédiatement à ce contexte en remplacant les voisinages V et U par des voisinages épointés. Cette remarque sera aussi valable pour les définitions 2.1.15 des « grand-O » et 2.1.19 des équivalents.

Exemples 2.1.6.

- On a $x^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(x^4)$. En effet, sur le voisinage $U =]0, +\infty[$ de $+\infty$, on pose $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^4} = x^{-2}$. On a bien $\forall x \in]0, +\infty[,\ x^2 = r(x)x^4$ et $r(x) = x^{-2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- On a $x^5 = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. En effet, sur le voisinage $U = \mathbb{R}$ de 0, on pose $r(x) = x^2$ (on a bien $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5}{x^3}$ pour $x \neq 0$, mais cette définition ne convient pas pour $x = 0$ car on divise par 0). On a bien $\forall x \in \mathbb{R},\ x^5 = r(x)x^3$ et $r(x) = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Pour un x_0 fixé, la notion de $\underset{x\to x_0}{o}$ permet de définir une hiérarchie entre les fonctions. Par exemples, les deux fonctions x^2 et x^4 tendent toutes deux vers $+\infty$ en $+\infty$, mais dire que x^2 est négligeable devant x^4 en $+\infty$ est une manière de dire qu'en $+\infty$, x^4 tend vers $+\infty$ « plus vite que x^2 ». (Notez que si on change x_0, on change complètement cette hiérarchie. Par exemple, x^4 est négligeable devant x^2 en 0.)

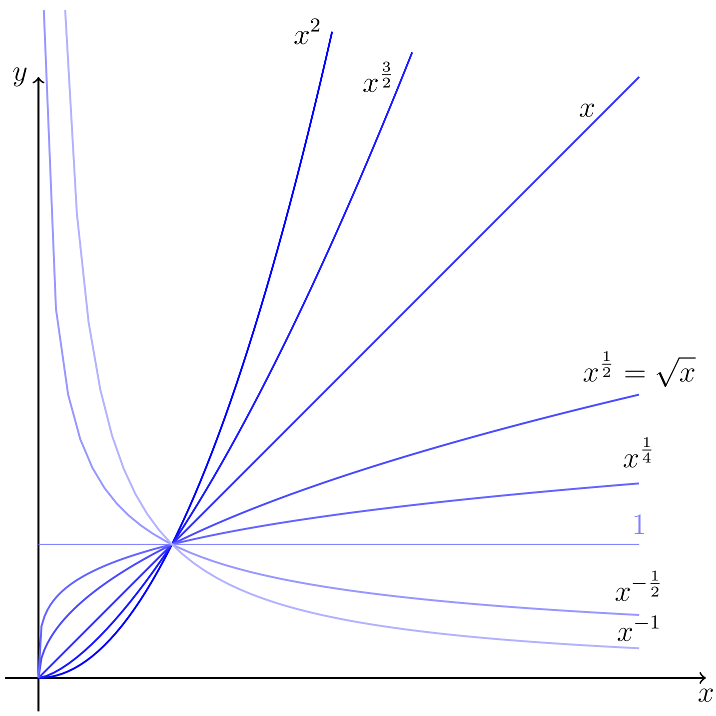


FIGURE 2.1 – Les graphes des fonctions puissances.

Les exemples 2.1.6 se généralisent dans la

Proposition 2.1.7. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors on a*

- $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta)$ *si et seulement si* $\alpha < \beta$,
- $x^\alpha = \underset{x\to+0}{o}(x^\beta)$ *si et seulement si* $\alpha > \beta$.

Démonstration. Cela découle immédiatement des limites bien connues

$$x^\gamma \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma > 0 \\ 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad |x^\gamma| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma > 0 \\ 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ +\infty & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$$

en posant $r(x) = x^{\alpha-\beta}$ sur un voisinage adapté. □

On rappelle la proposition suivante vue au premier semestre, qui sera très utile dans les exercices :

Proposition 2.1.8. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On a :*

- $e^{\alpha x}x^\beta \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \textit{si } \alpha > 0, \\ 0 & \textit{si } \alpha < 0. \end{cases}$
- $x^\beta |\ln x|^\gamma \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \textit{si } \beta > 0, \\ 0 & \textit{si } \beta < 0. \end{cases}$
- $x^\beta |\ln x|^\gamma \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \textit{si } \beta > 0, \\ +\infty & \textit{si } \beta < 0. \end{cases}$

Le moyen mnémotechnique pour se souvenir de cette proposition est de dire que « les exponentielles l'emportent sur les puissances, et que les puissances l'emportent sur les logarithmes ». La preuve est laissée en exercice (voir feuille TD du premier semestre).

Proposition 2.1.9 (Addition des « petit-o »)**.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soient f_1, f_2, g trois fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0 et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On suppose que $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$. Alors*

$$\lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)).$$

Démonstration. **(à savoir faire)** On sait qu'il existe U_1 voisinage de x_0 et $r_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in U_1,\ f_1(x) = r_1(x)g(x) \quad \text{et} \quad r_1(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

De même, il existe U_2 voisinage de x_0 et $r_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in U_2,\ f_2(x) = r_2(x)g(x) \quad \text{et} \quad r_2(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, sur le voisinage $U = U_1 \cap U_2$ de x_0, pour la fonction $r : U \to \mathbb{R}$ donnée par $r(x) = \lambda r_1(x) + \mu r_2(x)$, on a bien

$$\forall x \in U,\ \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = (\lambda r_1(x) + \mu r_2(x))g(x) = r(x)g(x) \quad \text{et} \quad r(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0,$$

par somme et multiplication par un scalaire de limites en x_0. □

Cette proposition est très pratique. Il faudra toutefois faire attention :

Dans le cas où $\lambda = 1$, on a bien $\underset{x\to x_0}{o}(g(x)) + \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ mais il est étrange d'écrire $\underset{x\to x_0}{o}(g(x)) + \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) = 2\underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ car les deux termes de la somme ne sont pas la même fonction. À chaque fois qu'on écrit $\underset{x\to x_0}{o}(g(x))$, on désigne une fonction négligeable devant g en x_0, mais cette fonction (tout comme le voisinage correspondant de x_0) change a priori à chaque occurrence.

Exemple 2.1.10. On a $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En effet, on a $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2} = \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-1}) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3} = \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-1}) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ par la proposition 2.1.7, et on applique la proposition 2.1.9.

Exercice 16. Est-il vrai que si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$?

Donner une condition suffisante sur $g(x)$ pour que ce soit vrai.

La notion de "petit-o" permet de reformuler la dérivabilité d'une fonction en un point.

Proposition 2.1.11. *Soit f une fonction réelle, et $x_0 \in D_f$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) La fonction f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = a$ (c'est-à-dire que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a$).

(b) $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0)$.

En particulier, si f est dérivable en x_0, alors on a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0).$$

On interprète cette écriture en disant que $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la meilleure approximation affine (c'est-à-dire polynomiale de degré 1) de f au voisinage de x_0. Graphiquement, on retrouve le fait bien connu que la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est tangente au graphe de la fonction f au point d'abscisse x_0, voir la figure 2.2.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $r(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a$, ce qui équivaut à

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

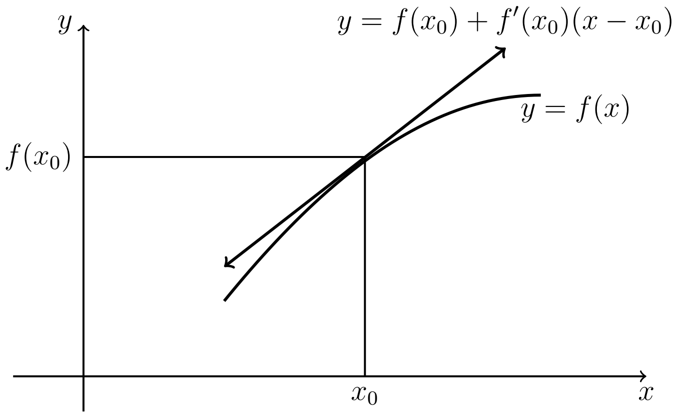


FIGURE 2.2 – La droite tangente en x_0 correspond à la meilleure approximation affine de la fonction au voisinage de x_0.

On a (a) si et seulement si $r(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, on a (b) si et seulement si $r(x)(x-x_0) = \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$, c'est-à-dire que $\dfrac{r(x)(x-x_0)}{x-x_0} = r(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

On en conclut que (a) et (b) sont bien équivalents. □

Cette caractérisation de la dérivée permet de calculer des limites délicates, comme le montrent les exemples ci-dessous.

Exemple 2.1.12. On a appris en terminale que $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Sachant que la fonction dérivée $f = \sin$ est $f' = \cos$, on retrouve cette limite facilement par le (b) de la proposition 2.1.11, qui s'écrit :

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)(x-0) + \underset{x\to 0}{o}(x) \iff \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \cos 0 = 1.$$

Cette limite nous permet de faire un **prolongement par continuité** de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en 0. Cette fonction n'est pas définie en 0 car x figure au dénominateur. Mais on peut considérer la fonction

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction coïncide avec f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (et même dérivable et, mieux encore, de classe C^∞). De plus, comme

$$\lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to 0} \tilde{f}(x) = 1 = \tilde{f}(0),$$

la fonction $\tilde{f}$ est aussi continue en 0, comme on le « voit » sur la figure 2.3. On pourra vérifier plus tard à titre d'exercice que $\tilde{f}$ est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$.

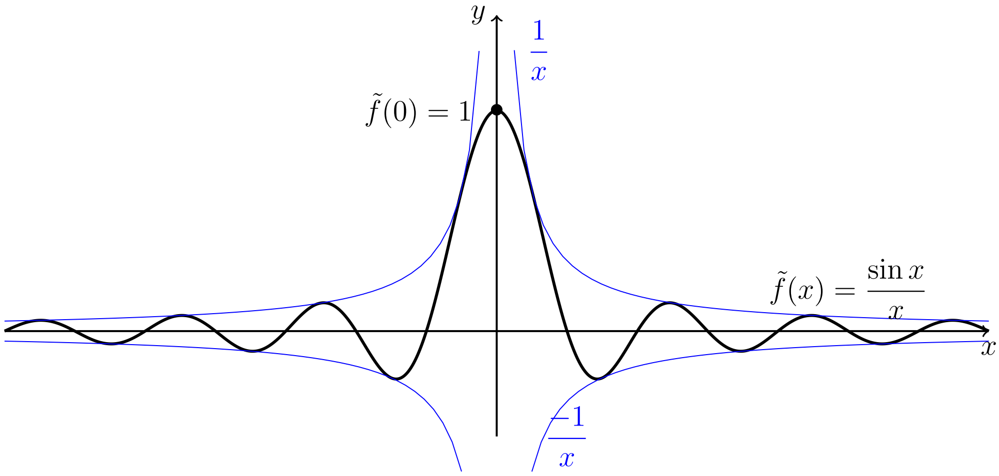


FIGURE 2.3 – Il est visible sur le graphe que la fonction $\dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0.

Exemple 2.1.13. On veut déterminer la limite en 0 de la fonction $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. On est confrontés à une forme indéterminée car $\ln(1+x)$ et x tendent toutes deux vers 0.

Mais la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ donc elle est dérivable en 0. On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, et d'après la proposition 2.1.11, on a

$$\ln(1+x) = f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \underset{x\to 0}{o}(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

On en déduit que

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x}} = e^{1+\underset{x\to 0}{o}(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^1 = e,$$

car la fonction e^x est continue en 1.

Exemple 2.1.14. On veut déterminer le comportement de $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

On factorise $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - 1\right)$. On va utiliser le changement de variable $y = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la dérivée de la fonction $g(y) = \sqrt{1+y}$ en 0. On rappelle que $g'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+y}}$, d'où l'on tire par la proposition 2.1.11 que

$$\sqrt{1+y} = g(y) = g(0) + g'(0)y + \underset{y\to 0}{o}(y) = 1 + \frac{1}{2}y + \underset{y\to 0}{o}(y).$$

On a alors

$$f(x) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

2.1.3 Notion de « grand-O »

Définition 2.1.15. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0. On dit que f est* **dominée par** *g* **au voisinage de** *x_0 et on note $f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x))$ ou $f = \underset{x \to x_0}{o}(g)$ (qu'on lit « f est un grand-O de g en x_0 ») s'il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $r : U \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in U,\ f(x) = r(x)g(x) \quad \textit{et} \quad r \textit{ est bornée sur } U.$$

Ici aussi, si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0, alors f est dominée par g lorsque le ratio $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné sur un voisinage de x_0.

Exemples 2.1.16.

- On a $(2 + \cos(x))e^x = \underset{x \to \infty}{O}(e^x)$. En effet, sur $U = \mathbb{R}$, la fonction $r(x) = 2 + \cos(x)$ est bornée.
- On a $\dfrac{3}{x+2} = \underset{x \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En effet, sur le voisinage $U =]0, +\infty[$ de $+\infty$, on a $r(x) = \dfrac{\frac{3}{x+2}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{3x}{x+2} < \dfrac{3x}{x} = 3$, bornée par 3.
- On a $\dfrac{2+x}{x^2} = \underset{x \to 0}{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En effet, $r(x) = 2 + x$ est bornée par 4 sur le voisinage $U =]-1, 1[$ de 0.

Proposition 2.1.17. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0. On a :*

$$f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x)) \iff \begin{cases} \exists U \textit{ voisinage de } x_0,\ \exists C \geq 0, \\ \forall x \in U \cap D_f \cap D_g,\ |f(x)| \leq C|g(x)|. \end{cases}$$

Démonstration. Pour la première implication, on prend pour C une borne sur la fonction r. Pour la réciproque, on pose

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{si } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } g(x) = 0. \end{cases}$$

On a bien r bornée par C sur U. $\square$

Proposition 2.1.18. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g, h trois fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0. Si $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x))$, alors $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x))$.*

Démonstration. **(à savoir faire)** Il existe un voisinage U_1 de x_0 tel que

$$\forall x \in U_1,\ f(x) = r_1(x)g(x) \quad \text{et} \quad r_1 \text{ est bornée sur } U_1.$$

D'autre part, il existe un voisinage U_2 de x_0 tel que

$$\forall x \in U_2,\ g(x) = r_2(x)h(x) \quad \text{et} \quad r_2(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

On pose $r(x) = r_1(x)r_2(x)$ sur le voisinage $U = U_1 \cap U_2 \cap V$ de x_0. On a bien

$$\forall x \in U,\ f(x) = r(x)h(x) \quad \text{et} \quad r(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire que $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x))$. □

2.1.4 Notion d'équivalent

Définition 2.1.19. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0. On dit que f est* **équivalente à** g **au voisinage de** x_0 *et on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$ s'il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $r : U \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in U,\ f(x) = r(x)g(x) \quad \textit{et} \quad r(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1.$$

Encore une fois, si g ne s'annule pas sur un voisinage U de x_0, alors f est équivalente à g au voisinage de x_0 si le ratio $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 en x_0.

Exemples 2.1.20.

- On a $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. En effet, $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- On a $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. En effet, $\dfrac{\frac{1}{x+\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{x}{x+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- Soit ℓ un réel. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$. En effet, on a alors $\dfrac{f(x)}{\ell} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$ par opération sur les limites.
  En particulier, si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f(x_0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x_0)$.

Proposition 2.1.21. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage V de x_0. On a*

1. *$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ si et seulement si $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.*
2. *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$.*

Donc $\underset{x\to x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration. Le premier point est évident si f et g ne s'annulent pas sur V. Le cas général est laissé en exercice.

Pour le second, on a deux fonctions r_1 et r_2 définies sur des voisinages U_1 et U_2 de x_0 tels que $\forall x \in U_1,\ f(x) = r_1(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} r_1 = 1$ et $\forall x \in U_2,\ g(x) = r_2(x)h(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} r_2 = 1$. Sur le voisinage $U = U_1 \cap U_2$ de x_0, on définit $r(x) = r_1(x)r_2(x)$. On a bien $\forall x \in U,\ f(x) = r(x)h(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} r = 1$. $\square$

Proposition 2.1.22 (Lien entre $\underset{x\to x_0}{o}$ et $\underset{x\to x_0}{\sim}$)**.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de x_0.*

1. *Si $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$, alors $f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.*
2. *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors $f(x) - g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(f(x))$.*

Démonstration. **(à savoir faire)** Pour le premier point, on a un voisinage U de x_0 tel que $\forall x \in U \cap D_f \cap D_g,\ f(x) = r(x)g(x)$ où $\lim\limits_{x\to x_0} r = 0$. Toujours sur U, pour $\tilde{r}(x) = r(x) + 1$, on a bien $f(x) + g(x) = \tilde{r}(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \tilde{r} = 1$ par addition de limites.

Le deuxième point se traite de manière similaire. $\square$

Proposition 2.1.23. *Soient f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty + \infty\}$. On suppose que $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f_2(x)$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$.*

1. *Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$, alors $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$.*
2. *Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_1(x))$, alors $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g_2(x))$.*

La preuve est laissée en exercice.

Proposition 2.1.24. *[Multiplication des équivalents] Soient f_1, f_2, g_1, g_2 quatre fonctions définies sur un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty + \infty\}$. On suppose que $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f_2(x)$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$. Alors*

$$f_1(x)g_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f_2(x)g_2(x).$$

Démonstration. **(à savoir faire)** On a deux fonctions r et r' définies sur des voisinages U et U' de x_0 tels que $\forall x \in U \cap V,\ f_1(x) = r(x)f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} r = 1$ et $\forall x \in U' \cap V,\ g_1(x) = r'(x)g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} r' = 1$. Sur le voisinage $U'' = U \cap U' \cap V$ de x_0, on définit $r''(x) = r(x)r'(x)$. On a bien $\forall x \in U,\ f_1(x)g_1(x) = r''(x)f_2(x)g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} r'' = 1$ par produit de limites. $\square$

Exercice 17. Trouver quatre fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 telles que $f_1 \underset{x\to+\infty}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{x\to+\infty}{\sim} g_2$ et f_1+g_1 ne soit pas équivalente en $+\infty$ à $f_2 + g_2$.

Exercice 18. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Est-il vrai que si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ alors $h(f(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} h(g(x))$?

On pourra considérer les fonctions $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$ et $h(x) = e^x$ pour $x_0 = +\infty$.

Proposition 2.1.25 (Signe de fonctions équivalentes)**.** *Soit f et g deux fonctions réelles définies sur un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$. Alors il existe un voisinage U de x_0 tel que*

$$\forall x \in U, \quad \begin{cases} f(x) > 0 \Longleftrightarrow g(x) > 0, \\ f(x) < 0 \Longleftrightarrow g(x) < 0, \\ f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. **(à savoir faire)** On montre seulement le premier point. On a une fonction r définie sur un voisinage U_1 telle que $\forall x \in U_1,\ f(x) = r(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 1$.

Cette limite assure que pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, il existe un voisinage $U \subset U_1$ de x_0 tel que $r(U) \subset]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$, donc en particulier que $\forall x \in U,\ r(x) > 0$.

La coïncidence des signes découle alors de l'égalité $\forall x \in U,\ f(x) = r(x)g(x)$. □

Proposition 2.1.26. *[Inverse des équivalents] Soient f, g deux fonctions définies sur un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty + \infty\}$. On suppose que $f \underset{x \to x_0}{\sim} g$ et que f ne s'annule pas sur V. Alors il existe un voisinage U sur lequel g ne s'annule pas et*

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \to x_0}{\sim} \frac{1}{g(x)}.$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Remarque 2.1.27. Les notions de petit-o, de grand-O et d'équivalent sont bien sûr valables pour les suites, qui sont des fonctions réelles ayant pour domaine de définition $\mathbb{N}$. On définit ainsi que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ si et seulement s'il existe un entier N et une suite $(r_n)_{n \geq N}$ tels que $\forall n \geq N,\ u_n = r_n v_n$ et $r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Et de même, *mutatis mutandis*, pour les notions de petit-o et grand-O.

2.2 Formules de Taylor

Définition 2.2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

- *Si $x_0 \in I$, on dit que f est* **dérivable au point** *x_0 si l'application $I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par $h \mapsto \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite (épointée) lorsque h tend vers 0. On note alors cette limite $f'(x_0)$.*
- *On dit que f est* **dérivable sur l'intervalle** *I si $\forall x_0 \in I$, f est dérivable au point I. On appelle fonction dérivée de f la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ donnée par $x_0 \mapsto f'(x_0)$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on dit que f est n* **fois dérivable sur l'intervalle** *I si f est $(n-1)$ fois dérivable sur I et si sa dérivée $(n-1)^{\text{ème}}$ $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On appelle alors $n^{\text{ème}}$ fonction dérivée de f, ou dérivée $n^{\text{ème}}$ de f, la fonction $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.*

La notion de dérivée $n^{\text{ème}}$ est donc définie par récurrence. On a bien sûr $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$, etc. On remarque que la dérivée seconde au point x_0 n'est pas définie directement à partir de la fonction f. Elle ne peut être définie que si f est dérivable sur un voisinage de x_0, et alors on utilise f' sur ce voisinage pour définir le réel $f''(x_0)$ comme la limite, si elle existe, de $\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$ quand h tend vers 0.

Définition 2.2.2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est* **de classe** C^n **sur** *I si f est n fois dérivable sur I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ $f^{(n)}$ est continue sur I. On dit que f est* **de classe** C^∞ **sur** *I si f est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

En particulier pour $n = 0$, f est de classe C^0 sur I si et seulement si f est continue sur I.

Exemple 2.2.3. De nombreuses fonctions usuelles sont C^∞ sur leur domaine de définition. C'est le cas des puissances, de l'exponentielle, du logarithme, du sinus, du cosinus... La fonction racine est quant à elle C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais seulement C^0 sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, comme la composition et les opérations de somme et multiplication préservent la continuité et la dérivabilité, elles préservent aussi la classe C^n pour un n fixé, et donc a fortiori la classe C^∞. Le passage à l'inverse préserve aussi ces propriétés dans les domaines où le dénominateur ne s'annule pas.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la formule de Taylor-Lagrange. Cette formule est à connaître par cœur. Ses utilisations en analyse sont innombrables. Sa généralisation pour $n = 1$ et $n = 2$ à des applications $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sera un des sujets centraux du cours de calcul différentiel en L2 (c'est déjà difficile pour $d = 2$ ou 3).

Théorème 2.2.4 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est de classe C^n sur $[a,b]$ et que f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$.*

Alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(b-a)^3}{3!}+\ldots+f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans cet énoncé, on note $[a,b]$ et $]a,b[$ pour désigner les intervalles fermé et ouvert dont les bornes sont a et b indépendamment de l'ordre entre a et b (on note par exemple $[1,0]$ de manière équivalente à $[0,1]$) ; c'est-à-dire que $[a,b] := \{x \in \mathbb{R},\ |a-x|+|x-b| = |a-b|\}$.

Il est important de bien noter le rôle du c qui apparaît seulement dans le dernier terme. En utilisant le symbole sigma, on peut réécrire la formule de Taylor-Lagrange (on rappelle que, par convention, $0! = 1$) :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On remarque aussi que, pour $n = 0$, la formule de Taylor-Lagrange n'est autre que le théorème des accroissements finis :

Théorème 2.2.5 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une application continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$*. Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Graphiquement, ce théorème assure qu'il existe sur le graphe de la fonction f un point d'abscisse c où la tangente est parallèle à la corde entre a et b (cf. la figure 2.4).

En cinétique, cela s'interprète comme suit. Si la fonction $f(t)$ représente la position à l'instant t d'un point mobile sur une droite (qui peut modéliser une voiture sur une route par exemple), alors la fonction dérivée $f'(t)$ décrit la vitesse de la voiture à l'instant t (et la dérivée seconde $f''(t)$ mesure l'accélération à l'instant t). Le théorème des accroissements finis assure qu'il existe un instant c où la vitesse « instantanée » $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ entre a et b.

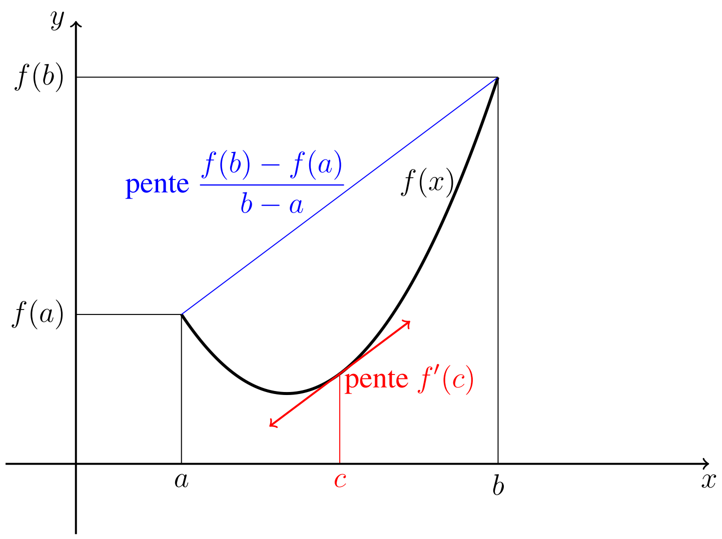


FIGURE 2.4 – Illustration du théorème des accroissements finis 2.2.5. La corde bleue et la tangente rouge sont parallèles.

Il est plus difficile d'interpréter intuitivement la formule de Taylor-Lagrange aux ordres supérieurs.

On rappelle la preuve du théorème des accroissements finis 2.2.5, vue au premier semestre :

Démonstration du théorème des accroissements finis 2.2.5. **(à savoir faire)**

Ce théorème est en fait une version « améliorée » du lemme de Rolle (cf. 2.4.6).

On pose, $\forall x \in [a,b]$,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

Par calcul, on a $g(a) = g(b) = \dfrac{bf(a) - af(b)}{b-a}$. De plus, g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f l'est. On peut donc appliquer le lemme de Rolle 2.4.6, qui assure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, $\forall x \in]a, b[$,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

On a donc bien $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. □

Démonstration de la formule de Taylor-Lagrange 2.2.4. La preuve du théorème des accroissements finis se généralise pour obtenir la formule de Taylor-Lagrange 2.2.4 :

On pose, $\forall x \in [a, b]$,

$$g(x) = f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} \right) - \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est défini par

$$\lambda = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right),$$

c'est-à-dire que λ est choisi pour avoir $g(a) = 0$. Il suffit donc de montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$.

On vérifie facilement que $g(b) = 0$ (seul le terme pour $k = 0$ ne s'annule pas, et il se simplifie avec le premier $f(b)$). On a donc $g(a) = g(b)$, et g est continue sur $[a, b]$ (car f y est de classe C^n) et dérivable sur $]a, b[$ (car f y est $(n+1)$ fois dérivable). On peut donc appliquer le lemme de Rolle, qui nous fournit un réel $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or on a, $\forall x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} g(x) \;&=\; f(b) - \left(f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(b-x)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \right) - \lambda \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

et donc, $\forall x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned} g'(x) \;&=\; -\left(f'(x) + f''(x)(b-x) - f'(x) + f^{(3)}(x)\frac{(b-x)^2}{2!} - f''(x)\frac{2(b-x)}{2!} \right. \\ &\qquad + f^{(4)}(x)\frac{(b-x)^3}{3!} - f^{(3)}(x)\frac{3(b-x)^2}{3!} + \ldots + \\ &\qquad \left. + f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!} - f^{(n)}(x)\frac{n(b-x)^{n-1}}{n!} \right) + \lambda \frac{(n+1)(b-x)^n}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

d'où, la plupart des termes s'éliminant par télescopage en appliquant l'égalité $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$,

$$g'(x) = -f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!} + \lambda\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Ainsi,

$$0 = g'(c) = \left(\lambda - f^{(n+1)}(c)\right)\frac{(b-c)^n}{n!}.$$

Comme $b - c \neq 0$, on en déduit bien que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$. □

Application de la formule de Taylor-Lagrange 2.2.4 : On va montrer que $\ln(1,003) = 0,00299550 + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 10^{-8}$, c'est à dire qu'on va donner les 8 premières décimales du nombre réel $\ln(1,003)$.

Pour cela, on va utiliser les formules de Taylor-Lagrange 2.2.4 aux ordres 2 et 3 pour la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ entre $a = 0$ et $b = x > 0$. On rappelle d'abord les dérivées successives

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

On en déduit que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 assure qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{(1+c)^3}. \quad \text{On en déduit que } \forall x > 0,\ \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 assure qu'il existe $c' \in]0, x[$ tel que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+c')^4}. \quad \text{On en déduit que } \forall x > 0,\ \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

On en déduit au total que

$$\forall x > 0,\ x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Pour $x = 0,003$, cela donne $x^2 = 9.10^{-6}$, donc $\dfrac{x^2}{2} = 45.10^{-7}$; et $x^3 = 27.10^{-9}$, donc $\dfrac{x^3}{3} = 9.10^{-9} < 10^{-8}$. Finalement :

$$0,002\,995\,50 < \ln(1,003) < 0,002\,995\,51.$$

Dans le membre de droite de la formule de Taylor-Lagrange, le dernier terme (comportant le c inconnu) peut ainsi être pensé comme une erreur entre $f(b)$ et son approximation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}$. Cette erreur diminue d'autant plus vite quand b tend vers a que l'ordre n est grand. C'est le sens de la formule suivante :

Corollaire 2.2.6 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur I, alors $\forall x_0 \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} \\ &\qquad + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Démonstration. On applique la formule de Taylor-Lagrange 2.2.4 à l'ordre $n-1$ (comme on ignore si $f^{(n)}$ est dérivable, on ne peut pas l'utiliser à l'ordre n), avec $a = x_0$ et $b = x$. On obtient qu'il existe $c_x \in \,]x_0, x[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} \\ &\qquad + \ldots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(c_x)\frac{(x-x_0)^n}{n!}. \end{aligned}$$

En écrivant $f^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(x_0) + f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)$, on en déduit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} \\ &\qquad + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Le dernier terme est de la forme $r(x)(x-x_0)^n$ avec $r(x) = \dfrac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Comme $f^{(n)}$ est continue, il suffit de voir que $c_x \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} x_0$ pour en déduire que $r(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$.

Cela découle évidemment de l'inégalité $|c_x - x_0| < |x - x_0|$. □

De la formule de Taylor-Lagrange découle également l'inégalité suivante, qui donne une majoration de l'erreur :

Corollaire 2.2.7 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in]a,b[,\ |f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Alors*

$$\left| f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right) \right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. On a, d'après la formule de Taylor-Lagrange 2.2.4, l'existence de $c \in \,]a,b[$ tel que

$$\left| f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right) \right| = \left| f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Remarque 2.2.8. Les hypothèses de ce corollaire sont satisfaites dès que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. En effet, cela signifie que $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$. Le théorème des extrema 2.4.7 assure alors que $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |f^{(n+1)}(x)| \leq M$.

2.3 Développements limités

2.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.3.1. *Soient f une fonction réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$ adhérent à D_f. On dit que f admet un* **développement limité à l'ordre** n **en** x_0 *(on abrégera souvent en DL$_n$) s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right),$$

c'est-à-dire s'il existe un polynôme P de degré $\leq n$ tel que $f(x) = P(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$.

Proposition 2.3.2. *Le DL$_n$ de f en x_0 est unique ; c'est-à-dire que si*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) \\ \text{et } f(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right), \end{aligned}$$

alors $\forall 0 \leq i \leq n,\ a_i = b_i$.

Démonstration. **(à savoir faire)** Par l'absurde : si c'est faux, on pose $j = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$. Par soustraction, on a

$$0 = (a_j - b_j)(x-x_0)^j + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^j\right).$$

En divisant par $(x-x_0)^j$ pour $x \neq x_0$, on obtient $0 = a_j - b_j + \underset{x\to x_0}{o}(1) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a_j - b_j = 0$. Contradiction. □

Remarque 2.3.3. On peut montrer en adaptant la preuve ci-dessus (exercice : faites-le !) que si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$, alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_j(x-x_0)^j, \text{ où } j = \min\{i \mid a_i \neq 0\}.$$

Par contre, si tous les termes du DL$_n$ sont nuls, on ne peut pas en déduire d'équivalent de f en x_0.

Remarques 2.3.4.

- On a les équivalences immédiates :

$$\begin{aligned} f \text{ a un DL}_0 \text{ en } x_0 &\iff \exists a_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1), \\ &\iff f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} a_0, \\ &\iff f \text{ est continue en } x_0 \text{ et } f(x_0) = a_0. \end{aligned}$$

- D'après la proposition 2.1.11, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ a un DL}_1 \text{ en } x_0 &\iff \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0), \\ &\iff f \text{ est dérivable (et donc continue !) en } x_0 \text{ et } f(x_0) = a_0 \text{ et } f'(x_0) = a_1. \end{aligned}$$

- D'après la formule de Taylor-Young 2.2.6, si f est de classe C^n sur un voisinage de x_0, alors f admet un DL_n en x_0 avec $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} \\ &\qquad + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

- Pour $n \geq 2$, il existe des fonctions admettant un DL_n en x_0 mais qui ne sont pas n fois dérivables en x_0, comme le montre l'exemple suivant avec $n = 2$ et $x_0 = 0$.

Exemple 2.3.5. On considère la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a pour $x \neq 0$, $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ car $x \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 en 0. Donc f admet un DL_2 en 0 avec $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Néanmoins, on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par les opérations usuelles et on a

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Quand $x \to 0$, le premier terme tend vers 0 et le second terme n'a pas de limite. On en déduit que $f'(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0, donc que f' n'est pas continue en 0. A fortiori, f' n'est pas dérivable en 0 et donc en particulier, la dérivée seconde en 0 n'existe pas.

2.3.2 Développements limités usuels

Dans cette section, on donne les développements limités à tout ordre des fonctions usuelles au point $x_0 = 0$. Ces DL sont à connaître absolument !

Pour la fonction exponentielle en $x_0 = 0$, on a

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).} \quad \heartsuit$$

En effet, on a pour $f(x) = e^x$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) = e^x \ \text{ et donc } \ \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = e^0 = 1,$$

et on applique la formule de Taylor-Young 2.2.6 à l'ordre n.

La formule de Taylor-Young permet aussi de calculer facilement les DL à tous ordres des fonctions sinus et cosinus.

On rappelle que

$$\cos^{(k)} = \begin{cases} \cos & \text{si } k \equiv 0 \bmod 4 \\ -\sin & \text{si } k \equiv 1 \bmod 4 \\ -\cos & \text{si } k \equiv 2 \bmod 4 \\ \sin & \text{si } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} \quad \text{donc } \cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \bmod 4 \\ 0 & \text{si } k \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{si } k \equiv 2 \bmod 4 \\ 0 & \text{si } k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

En appliquant la formule de Taylor-Young raffinée à l'ordre $2k+1$ en $x_0 = 0$, on en déduit que

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2k+1}).} \quad \heartsuit$$

De même pour sinus, on a

$$\sin^{(k)} = \begin{cases} \sin & \text{si } k \equiv 0 \bmod 4 \\ \cos & \text{si } k \equiv 1 \bmod 4 \\ -\sin & \text{si } k \equiv 2 \bmod 4 \\ -\cos & \text{si } k \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} \quad \text{donc } \sin^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \equiv 0 \bmod 4 \\ 1 & \text{si } k \equiv 1 \bmod 4 \\ 0 & \text{si } k \equiv 2 \bmod 4 \\ -1 & \text{si } k \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

En appliquant la formule de Taylor-Young 2.2.4 à l'ordre $2k+2$ en $x_0 = 0$, on en déduit que

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2k+2}).} \quad \heartsuit$$

Exercice 19. En admettant que les développements limités de la fonction exponentielle restent vrais pour des variables complexes, retrouver les DL de sinus et cosinus à l'aide de la décomposition en partie réelle et partie imaginaire $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Un autre DL très utile à connaître est le suivant : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).} \quad \heartsuit$$

Démonstration. C'est la formule de Taylor-Young 2.2.6 avec

$$\begin{array}{lcl} f(x) = (1+x)^\alpha & & f(0) = 1 \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & \text{d'où} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} & & f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ \dots & & \dots \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, & & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1)). \end{array}$$

□

Certains DL peuvent s'obtenir sans utiliser la formule de Taylor-Young. Par exemple, on a

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).} \quad \heartsuit$$

Démonstration. Par somme d'une suite géométrique, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \frac{x}{1-x} x^n,$$

et la fonction $r(x) = \dfrac{x}{1-x}$ tend vers 0 en 0. $\square$

Exercice 20. Retrouver les DL de $\dfrac{1}{1-x}$ via les formules de Taylor-Young.

Par changement de variable, on obtient les DL de $\dfrac{1}{1+x}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).}$$

(car $-x$ tend vers 0 si x tend vers 0), ou encore les DL de $\dfrac{1}{1+x^2}$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).}$$

Enfin, le dernier DL classique à connaître est

$$\heartsuit \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).} \quad \heartsuit$$

Il s'obtient à partir des DL de $\dfrac{1}{1+x}$ en prenant les primitives terme à terme, en application de la proposition suivante :

Proposition 2.3.6. *Soient f une fonction réelle et x_0 un réel adhérent à D_f. Si*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right),$$

alors son unique primitive s'annulant en x_0 satisfait

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = a_0(x-x_0) + a_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + a_2\frac{(x-x_0)^3}{3} + \cdots + a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^{n+2}\right).$$

Attention, cette proposition assure que les DL peuvent s'intégrer (se primitiver), mais il n'est pas possible de dériver des DL (cf. le TD).

Démonstration. On observe d'abord que la fonction $a_k(x-x_0)^k$ a pour unique primitive s'annulant en x_0 la fonction $a_k\dfrac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$.

Il suffit donc de voir que si $g(x) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$, alors

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

On a $g(t) = r(t)(t-x_0)^n$ où $r(t)$ tend vers 0 en 0. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|t-x_0| < \delta$ implique $|r(t)| < \varepsilon$.

Fixons un $\varepsilon > 0$ arbitraire, et soit δ associé par ce qui précède. On a alors, $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$,

$$\begin{aligned}
|G(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} g(t)dt\right| &= \left|\int_{x_0}^{x} r(t)(t-x_0)^n dt\right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |r(t)||t-x_0|^n dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \varepsilon|x-x_0|dt \text{ car } |t-x_0| \leq |x-x_0| < \delta \\
&\leq \varepsilon|x-x_0|^n \int_{x_0}^{x} 1dt = \varepsilon|x-x_0|^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que si $|x-x_0| < \delta$, alors $\left|\dfrac{G(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right| < \varepsilon$. Cela montre que $\dfrac{G(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0, c'est-à-dire que $G(x) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$. $\square$

Exercice 21. Utiliser la proposition précédente pour déterminer les DL à tout ordre de la fonction $\arctan$.

Remarque 2.3.7. On se contente dans bien des exercices de considérer les développements limités en 0. Pour le cas général, on peut toujours s'y ramener en posant $y = x - x_0$ (qui équivaut à $x = x_0 + y$). On a bien $y \to 0$ si et seulement si $x \to x_0$. Il faut alors exprimer f en fonction de y, faire le DL en $y \to 0$ puis revenir à la variable x.

Remarque 2.3.8. En voyant les formules des développements limités à tout ordre des fonctions usuelles, on peu légitimement se demander si la suite des approximations qu'ils fournissent converge vers la fonction. Plus précisement,

$$\text{si } \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n),\ \text{a-t-on } f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ ?} \tag{2.1}$$

On observe que c'est toujours vrai pour $x = 0$, mais que c'est faux en général pour $x \neq 0$, comme le montre l'exemple classique ci-dessous :

Exemple 2.3.9. On pose $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. À tout ordre n, le polynôme nul donne un développement limité pour f. En effet, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Cela découle de la limite

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} x^{-n} = \lim_{y\to +\infty} e^{-y} y^{\frac{n}{2}} = 0,$$

en utilisant la proposition 2.1.8 et le changement de variable $y = \dfrac{1}{x^2}$ où $x \to 0$ équivaut à $y \to +\infty$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x)$ si $x \neq 0$.

Par contre, la réponse à la question (2.1) est oui dans les cas suivants :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour les fonctions classiques $\exp, \cos, \sin$,
- pour tout $x \in]-1, 1[$ pour les fonctions $(1+x)^\alpha$ où $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $\dfrac{1}{1-x}$,
- pour tout $x \in]-1, 1]$ pour $\ln(1+x)$.

Les fonctions jouissant de cette propriété pour un intervalle $]-R, R[$ sont dites « développables en séries entières », et le plus grand tel R est appelé rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Cette propriété extrêmement intéressante sera étudiée en L2. On notera que le contre-exemple $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est quand même une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2.3.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 2.3.10 (Combinaisons linéaires de DL)**.** *Soient λ, μ deux réels. Supposons que f et g admettent un DL$_n$ en x_0 de la forme*

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right), \\ g(x) &= Q(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right), \end{aligned}$$

avec P et Q deux polynômes de degré $\leq n$. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet pour DL$_n$ en x_0

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x-x_0) + \mu Q(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right).$$

Démonstration. On écrit les DL en utilisant la définition des petit-o.

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x-x_0) + r_1(x)(x-x_0)^n, \\ g(x) &= Q(x-x_0) + r_2(x)(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

où r_1 et r_2 tendent vers 0 en x_0. On en déduit

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x-x_0) + \mu Q(x-x_0) + (\lambda r_1(x) + \mu r_2(x))(x-x_0)^n,$$

qui est bien le DL voulu, car $\lambda r_1 + \mu r_2$ tend aussi vers 0 en x_0 par combinaison linéaire de limites. $\square$

Exemple 2.3.11. On donne un DL$_3$ de la fonction $e^x + \dfrac{2}{1-x}$ en 0.

Pour cela, on rappelle que $e^x = 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)$. On déduit de la proposition que

$$e^x + \frac{2}{1-x} = 3 + 3x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Proposition 2.3.12 (Produits de DL)**.** *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.10, le produit fg admet un DL$_n$ en x_0 obtenu en faisant le produit des polynômes P et Q et en tronquant à l'ordre n.*

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. Il est plus utile de traiter des exemples. □

Exemple 2.3.13. On se propose de donner un DL$_2$ de $\cos(x)\sqrt{1+x}$ en 0.

On utilise les DL$_2$ de $\cos(x)$ et $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ et on développe le produit :

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&\qquad + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Les sept autres termes sont tous des $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On ne se donne pas la peine des les expliciter. Reste à ordonner notre résultat :

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Proposition 2.3.14 (Composition des DL)**.** *Soient f, g deux fonctions telles que*

$$\begin{aligned}
f(x) &= P(x) + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right), \\
g(y) &= Q(y) + \underset{y\to y_0}{o}\left((y-y_0)^n\right),
\end{aligned}$$

avec P et Q deux polynômes de degré $\leq n$ et $f(x_0) = y_0$. Alors $g \circ f$ admet un DL$_n$ en x_0, donné par la troncature à l'ordre n du polynôme $Q \circ P(x) = Q(P(x))$.

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. Il est plus utile de traiter des exemples. □

Exemple 2.3.15. On se propose de donner un DL$_3$ de $e^{\sin x}$ en 0.

On rappelle que $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ et $e^y = 1+y+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{6}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)$. On va utiliser la seconde formule en posant $y = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On obtient

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= e^{x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)} \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^3 \\
&\qquad + \underset{x\to 0}{o}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{O}(x^5)\right)^3\right) \\
&= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}(x^2) + \frac{1}{6}(x^3) + \underset{x\to 0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

Comme on veut un DL_3, on ne garde que les termes de degré ≤ 3 quand on développe les puissances. Reste à ordonner les termes :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Exemple 2.3.16. On se propose de donner un DL_2 de $\sqrt{1+\cos x}$ en 0.

On rappelle que $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $\sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{y}{2} - \dfrac{y^2}{8} + \underset{y\to 0}{o}(y^2)$. Il est tentant de poser $y = \cos x$ et d'injecter le premier DL dans le second. C'est malheureusement faux car le second est vrai pour $y \to 0$ et $\cos x \to 1$ (on n'a pas $f(x_0) = y_0$ si on veut appliquer la proposition). C'est pour cela qu'il faut poser $y = \cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{2+y} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{y}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{y}{4} + \underset{y\to 0}{o}(y)\right) \text{ d'après le DL}_1 \text{ de } \sqrt{1+y} \text{ en } 0 \text{ appliqué à } \frac{y}{2}, \\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

On remarque qu'il suffit en fait du DL_1 de $\sqrt{1+\dfrac{y}{2}}$ car y est dominée par x^2. On remarque aussi qu'on a donné le DL_1 de $\sqrt{2+y}$ en 0, ce qui est équivalent à donner le DL_1 de $\sqrt{1+x}$ en 1.

Exemple 2.3.17. On se propose de donner un DL_3 de $\tan(x)$ en 0. On a

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}.
\end{aligned}$$

Pour inverser un DL, on utilise la composition par $\frac{1}{1-y} = 1 + y + \underset{y\to 0}{o}(y)$ avec $y = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ici, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).\end{aligned}$$

Reste à ordonner, et on conclut :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

2.4 Utilisations des DL

Voici quelques exemples d'utilisation des DL. Il y en a bien d'autres !

2.4.1 Extrema locaux et globaux

Définition 2.4.1. *Soient f une fonction réelle et $x_0 \in D_f$. On dit que*

- *f admet un* **maximum local** *au point x_0 s'il existe un voisinage U de x_0 tel que*

$$f(x_0) = \max\{f(t) \mid t \in U \cap D_f\} = \max_U f.$$

- *f admet un* **minimum local** *au point x_0 s'il existe un voisinage U de x_0 tel que*

$$f(x_0) = \min\{f(t) \mid t \in U \cap D_f\} = \min_U f.$$

- *f admet un* **extremum local** *au point x_0 si f admet un maximum ou un minimum local au point x_0.*
- *f admet un maximum, minimum ou extremum* **global** *en x_0 si on peut prendre $U = \mathbb{R}$.*

Proposition 2.4.2. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que*

$$f(x) - f(x_0) = a_{2k}(x - x_0)^{2k} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^{2k}\right),$$

où $a_{2k} \neq 0$. Alors

1. *si $a_{2k} > 0$, alors f admet un minimum local en x_0,*
2. *si $a_{2k} < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.*

Si f est deux fois dérivable sur un voisinage de x_0 et que $f'(x_0) = 0$, alors la formule de Taylor-Young 2.2.6 assure que le cas 1. s'applique quand $f''(x_0) > 0$ et le cas 2. s'applique quand $f''(x_0) < 0$.

Démonstration. **(à savoir faire)** Quand $a_{2k} \neq 0$, on a

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} a_{2k}(x - x_0)^{2k}.$$

D'après la proposition 2.1.25 sur le signe des équivalents, il existe un voisinage U de x_0 sur lequel $f(x) - f(x_0)$ a le même signe que $a_{2k}(x - x_0)^{2k}$. Cela implique que si $a_{2k} > 0$ (resp. $a_{2k} < 0$), alors $\forall x \in U \setminus \{x_0\},\ f(x) > f(x_0)$ (resp. $f(x) < f(x_0)$), donc que f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0. □

Proposition 2.4.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit x_0 intérieur à I, c'est-à-dire que I est un voisinage de x_0. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en x_0.*

Si f admet un extremum local en x_0, alors le premier terme non nul du DL$_n$ de $f(x) - f(x_0)$ en x_0 est d'ordre pair. En particulier, $f'(x_0) = 0$.

Quand $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un **point critique** de f.

Démonstration. **(à savoir faire)** On démontre la contraposée, c'est-à-dire que si le premier terme non nul du DL$_n$ de $f(x) - f(x_0)$ en x_0 est d'ordre impair, alors f n'admet pas d'extremum en x_0.

Supposons donc que $f(x) = f(x_0) + a_{2k+1}(x - x_0)^{2k+1} + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^{2k+1}\right)$. On distingue deux cas. Tout d'abord si $a_{2k+1} > 0$. La remarque 2.3.3 nous assure que

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} a_{2k+1}(x - x_0)^{2k+1}.$$

Donc, par la proposition 2.1.25 sur les signes des équivalents, il existe un voisinage U de x_0 sur lequel $f(x) - f(x_0)$ et $a_{2k+1}(x - x_0)^{2k+1}$ ont même signe. En particulier,

$$\begin{aligned} \forall x > x_0, &\qquad a_{2k+1}(x - x_0)^{2k+1} > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0), \\ \forall x < x_0, &\qquad a_{2k+1}(x - x_0)^{2k+1} < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0). \end{aligned}$$

La première ligne assure que f n'admet pas de maximum en x_0. La seconde pas de minimum. Il n'y a donc pas d'extremum en x_0.

Le cas $a_{2k+1} < 0$ se traite de manière similaire. □

Exemple 2.4.4. On profite de la preuve ci-dessus pour faire l'observation suivante : avoir $f'(x_0) > 0$ **n'implique pas** que la fonction f soit croissante sur un voisinage de x_0. Par exemple, on pourra étudier en TD la fonction donnée par $f(x) = x + x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée en 0 est $f'(0) = 1 > 0$. Pourtant, f n'est croissante sur aucun voisinage de 0 comme on le « voit » sur la figure 2.5.

Ce fait est certainement contre-intuitif. On retrouve le résultat qu'on imagine si on fait une hypothèse supplémentaire de continuité de la dérivée, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 22. Soit f une fonction réelle dérivable sur un voisinage de x_0. On suppose que $f'(x_0) > 0$ et que f' est continue en x_0. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est croissante.

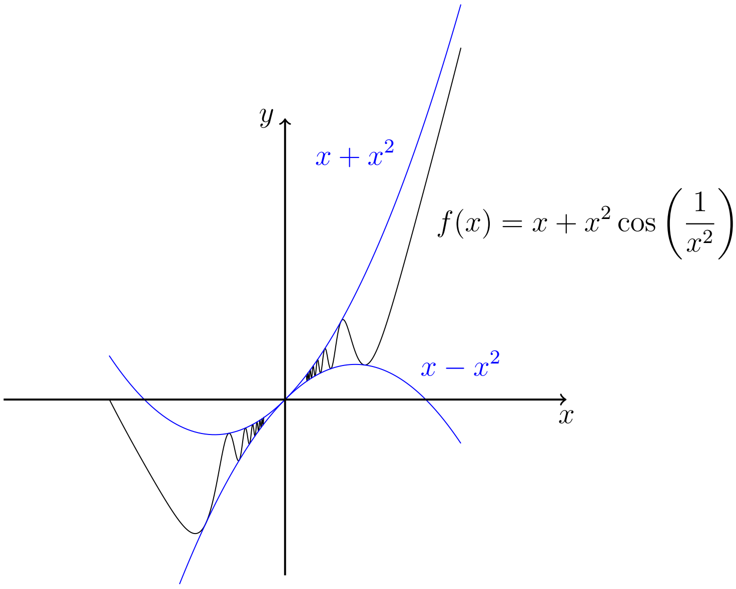


FIGURE 2.5 – Une fonction telle que $f'(x_0) > 0$ mais n'étant croissante sur aucun voisinage de x_0. Noter que la proposition 2.4.3 s'applique quand même.

Exemple 2.4.5. On se propose de déterminer les extrema locaux de $f(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3$. Pour cela, on calcule $f'(x) = 60x^2(x-1)(x+2)$. Les points critiques sont $0, 1$ et -2. Pour savoir si ce sont des minima, des maxima ou ni l'un ni l'autre, il faut faire une étude plus détaillée. Ici, on fait une étude du tableau de variations, mais plus tard on pourra faire plus simplement un développement limité.

On vérifie que $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ et que $f'(x) < 0$ sur $]-2, 1[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]-\infty, -2]$, strictement décroissante sur $[-2, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi, f admet un maximum local en -2, un minimum local en 1, et pas d'extremum local en 0. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la fonction f n'admet pas d'extremum global.

Le graphe de cette fonction est dessiné à la figure 2.6.

La proposition 2.4.3, qui assure que les extrema intérieurs sont des points critiques, s'avère très utile. Elle permet de démontrer le :

Lemme 2.4.6 (Lemme de Rolle)**.** *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. **(à savoir faire)** D'après le théorème des extrema 2.4.7, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \max_{[a,b]} f$. On distingue deux cas :

Si $x_0 \in]a, b[$, alors la proposition 2.4.3 assure que $f'(x_0) = 0$, et on prend $c = x_0$.

Sinon, alors $f(a) = f(b) = \max_{[a,b]} f$. Mais alors, le théorème des extrema 2.4.7 assure qu'il existe $y_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \min_{[a,b]} f$. On distingue à nouveau deux cas :

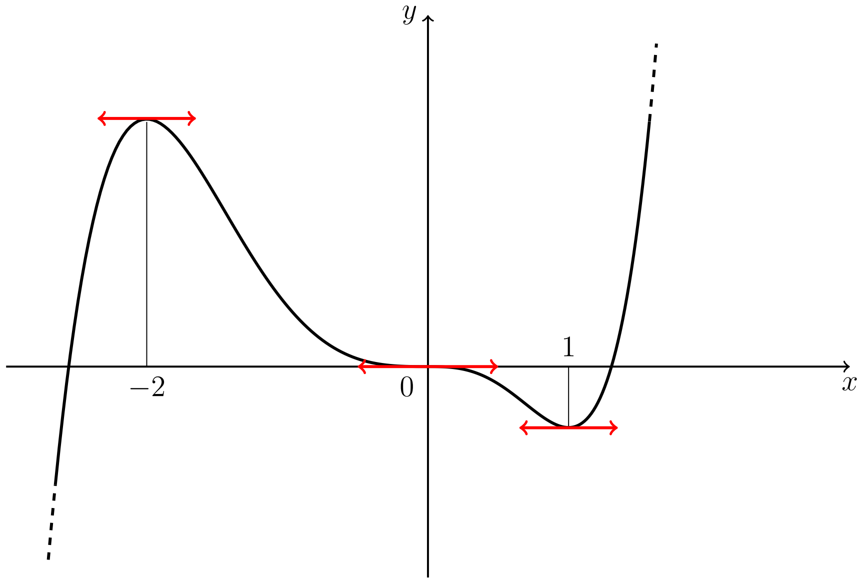


FIGURE 2.6 – Graphe de la fonction $f(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3$ et ses points critiques en $-2, 0, 1$.

Si $y_0 \in]a, b[$, alors la proposition 2.4.3 assure que $f'(y_0) = 0$, et on prend $c = y_0$.

Sinon, alors $f(a) = f(b) = \max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f$, et donc f est constante sur $[a, b]$. Dans ce cas, on a $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$.

Dans tous les cas, on a trouvé un point critique intérieur. $\square$

On a vu des critères nécessaires et des critères suffisants assurant l'existence d'extrema. On donne ici un théorème assurant l'existence d'un maximum et d'un minimum pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné.

Théorème 2.4.7 (Théorème des extrema)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et admet un maximum et un minimum, c'est-à-dire qu'il existe $c, d \in [a, b]$ tels que*

$$\begin{aligned} f(c) &= \sup\{f(t) \mid t \in [a, b]\} = \max\{f(t) \mid t \in [a, b]\}, \\ f(d) &= \inf\{f(t) \mid t \in [a, b]\} = \min\{f(t) \mid t \in [a, b]\}. \end{aligned}$$

On note que le théorème serait faux si on remplaçait $[a, b]$ par un intervalle non-fermé ou non-borné. Par exemple, la fonction $\dfrac{1}{x}$ est bien continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas bornée, car $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Exercice 23. Montrer que le théorème est faux si l'on supprime l'hypothèse de continuité.

Démonstration. On montre que f est majorée et admet un maximum (la minoration et le minimum se montrent de la même façon).

On montre d'abord que f est majorée. Par l'absurde, supposons que f n'est pas majorée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourrait trouver un réel $t_n \in [a,b]$ tel que $f(t_n) > n$. En particulier, la suite $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendrait vers $+\infty$.

Mais comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a,b]$, elle est bornée, et d'après le théorème 1.7.6 de Bolzano-Weierstrass, on en déduit qu'il existe un réel $\ell \in [a,b]$ et une extraction φ tels que $t_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Comme f est continue en ℓ, on en déduit que $f(t_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) \in \mathbb{R}$. Cela contredit le paragraphe précédent. On conclut que f est majorée.

Reste à voir que f admet un maximum. Sachant qu'elle est majorée, elle admet une borne suérieure. D'après l'exercice 6, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ telle que $f(t_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup_{[a,b]} f$. Or, d'après le théorème 1.7.6 de Bolzano-Weierstrass, il existe un réel $c \in [a,b]$ et une extraction φ tels que $t_{\varphi(n)} \to c$. Comme f est continue en c, on en déduit que $f(t_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(c)$. On conclut que $f(c) = \sup\{f(t) \mid t \in [a,b]\}$. Donc f atteint son maximum en c. □

On note que le théorème reste vrai si on remplace $[a,b]$ par une partie compacte de $\mathbb{R}$ (cf. la section 1.10.3).

Remarque 2.4.8. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue, où I est un intervalle. Le théorème des valeurs intermédiaires vu au premier semestre assure que pour tout couple $y,\ y'$ d'éléments dans l'image de f, le segment $[y,y']$ est inclus dans l'image de f. Cette observation assure que Im(f) est un intervalle de $\mathbb{R}$ (prouvez-le !). Le théorème des extrema montre que si I est un segment (intervalle fermé borné), alors son image par une fonction continue est aussi un segment.

Le théorème des extrema 2.4.7 permet d'améliorer légèrement la formule de Taylor-Young 2.2.6 :

Corollaire 2.4.9 (Formule de Taylor-Young raffinée)**.** *Si f est de classe C^{n+1} au voisinage de x_0, alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\qquad + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{O}\left((x-x_0)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit U un voisinage de x_0 sur lequel $f^{(n+1)}$ est continue. Il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset U$. A fortiori, $\left[x_0 - \frac{\alpha}{2}, x_0 + \frac{\alpha}{2}\right] \subset U$ est un intervalle fermé borné sur lequel $f^{(n+1)}$ est continue. Le théorème des extrema 2.4.7 donne $M \geq 0$ tel que $\forall x \in \left[x_0 - \frac{\alpha}{2}, x_0 + \frac{\alpha}{2}\right]$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$.

On déduit alors de l'inégalité de Taylor-Lagrange 2.2.7 avec $a = x_0$ et $b = x_0 \pm \frac{\alpha}{2}$ que $\forall x \in \left[x_0 - \frac{\alpha}{2}, x_0 + \frac{\alpha}{2}\right]$,

$$\left| f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

On conclut par la proposition 2.1.17. □

Remarque 2.4.10. La formule de Taylor-Young raffinée 2.4.9 donne un peu plus d'informations que la formule de Taylor-Young basique 2.2.6, car savoir que le reste est $\underset{x\to x_0}{O}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$ est plus précis que savoir $\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$; par exemple, un reste de l'ordre $(x-x_0)^{n+\frac{1}{2}}$ est exclu dans la forme raffinée, pas dans la forme basique. Le « coût » à payer pour cette information est que la forme raffinée nécessite des fonctions un peu plus régulières. Dans le cas des fonctions de classe C^∞, les deux formules sont valides.

2.4.2 Calcul de limites

On se propose de montrer que $\dfrac{1}{(\sin x)^2} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$. Pour cela, on calcule un DL_3 en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2} - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} - 1\right) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) - 1\right) \\
&= \frac{1}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2.4.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

On se propose de donner la tangente en 0 et localement la position de la courbe par rapport à cette tangente pour la fonction $f(x) = \dfrac{5x - x^3}{3 + x^2}$.

On rappelle que l'équation de la droite tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, donnée par un DL_1 en x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0)\,.$$

Pour déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente, il faut regarder le premier terme de degré ≥ 2 non nul dans les DL de f en x_0. On fait un DL_3 en 0 :

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{5x - x^3}{3 + x^2} &= (5x - x^3) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}} = (5x - x^3) \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(5x - \frac{5}{3}x^3 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) = \frac{5}{3}x - \frac{8}{9}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).
\end{aligned}$$

On en déduit que la tangente à f en 0 a pour équation $y = \dfrac{5}{3}x$. De plus, la différence entre la courbe et la tangente est

$$f(x) - \frac{5}{3}x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{8}{9}x^3.$$

On déduit de la proposition 2.1.25 qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel $f(x) - \dfrac{5}{3}x$ a même signe que $-\dfrac{8}{9}x^3$, soit (cf. la figure 2.7) :

$$\text{si } x > 0, \quad \text{alors } f(x) < \frac{5}{3}x, \quad \text{donc le graphe de } f \text{ est en dessous de la tangente,}$$

$$\text{si } x < 0, \quad \text{alors } f(x) > \frac{5}{3}x, \quad \text{donc le graphe de } f \text{ est en dessus de la tangente.}$$

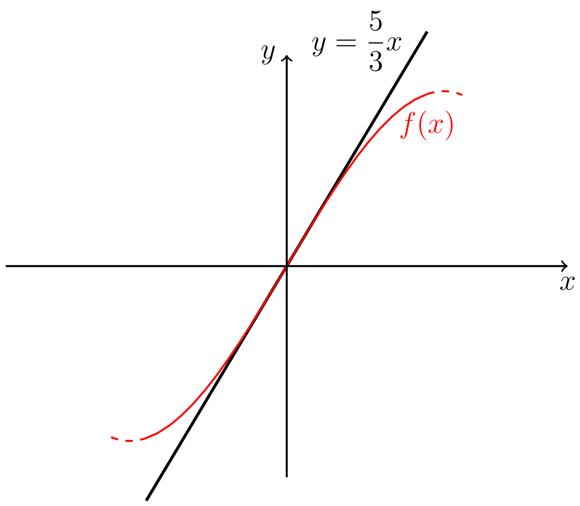


FIGURE 2.7 – Position relative de $f(x) = \dfrac{5x - x^3}{3 + x^2}$ en rouge par rapport à sa tangente $y = \dfrac{5}{3}x$ en 0.

2.4.4 Approximation locale de fonctions réciproques

On se propose de donner des solutions approchées de l'équation $xe^{x^2} = y$ pour x, y proches de 0. Plus précisément, on va calculer un DL_3 de la fonction réciproque de $f(x) = xe^{x^2}$.

Il faut d'abord poser plus précisément le problème. On considère la fonction $f(x) = xe^{x^2}$. Elle est de classe C^∞ par composition et produit de fonctions C^∞. Sa dérivée est $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (2x^2+1)e^{x^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a par opérations usuelles sur les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

La fonction f étant aussi continue, le théorème de la bijection réciproque vu au premier semestre assure que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, et que sa bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire l'unique fonction telle que l'on ait

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{x^2} = y \iff f^{-1}(y) = x,$$

(c'est-à-dire que $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $xe^{x^2} = y$) est aussi une bijection croissante continue. De plus, comme f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la réciproque f^{-1} est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}. \tag{2.2}$$

En fait, la fonction f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour le justifier, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, f^{-1} est de classe C^n. L'initialisation pour $n = 0$ est vraie d'après le théorème de la bijection réciproque. Supposons par récurrence que f^{-1} est de classe C^n. On sait que f' est de classe C^n (en fait de classe C^∞ car f elle-même est de classe C^∞) et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La formule (2.2) donnant la dérivée de la réciproque assure alors par composition et inversion que $(f^{-1})'$ est de classe C^n, c'est-à-dire que f^{-1} est de classe C^{n+1}, assurant l'hérédité de notre récurrence.

La formule de Taylor-Young 2.2.6 nous assure alors que f^{-1} admet un DL_n à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et ceci en tout point $y_0 \in \mathbb{R}$. Notons $a_0, \ldots, a_3$ les coefficients du DL_3 en 0, c'est-à-dire

$$f^{-1}(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^3).$$

On doit maintenant identifier les valeurs numériques de ces coefficients. Pour cela, on utilise l'égalité bien connue $\forall x \in \mathbb{R},\ x = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(xe^{x^2})$. Pour $y = xe^{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient, en notant l'équivalent $x^4 e^{4x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et le DL de l'exponentielle $e^{x^2} = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, que

$$\begin{aligned} x = f^{-1}(xe^{x^2}) &= a_0 + a_1 x e^{x^2} + a_2 x^2 e^{2x^2} + a_3 x^3 e^{3x^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3 e^{3x^2}\right) \\ &= a_0 + a_1 x(1 + x^2) + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (a_1 + a_3) x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du DL_3 de la fonction x, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -1. \end{array}\right.$$

Finalement :

$$f^{-1}(y) = y - y^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^3).$$

Pour une résolution de l'équation explicite $xe^{x^2} = 0,03 = 3.10^{-2} = y$, nous obtenons une approximation $x_{\text{approx}} = y - y^3 = 3.10^{-2} - 27.10^{-6} = 0,029973$. Une calculatrice donne $x = f^{-1}(y) = 0,029973060571\ldots$.

2.5 Développements asymptotiques

Il est aussi naturel de chercher la position d'une courbe par rapport à une asymptote, ou de vouloir résoudre l'équation $xe^{x^2} = y$ pour x, y très grands, c'est-à-dire au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on introduit la notion suivante :

Définition 2.5.1. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Supposons que*

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \underset{x \to x_0}{o}(u_n(x)), \tag{2.3}$$

avec $\forall 1 \leq i \leq n-1,\ u_{i+1}(x) = \underset{x \to x_0}{o}(u_i(x))$. On dit alors que (2.3) est un **développement asymptotique** *à n termes de $f(x)$.*

La notion de développement asymptotique généralise celle de développement limité. Par exemple, les formules (2.4) et (2.5) sont des développements asymptotiques. Il y a aussi des exemples très simples de fonctions qui n'ont presque pas de DL, mais de bons développements asymptotiques.

La fonction $\sin\sqrt{x}$ n'admet pas de DL_1 en 0 (elle n'y est pas dérivable), mais on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{\frac{2n+1}{2}}\right).$$

Définition 2.5.2. *S'il existe a, b deux réels tels que $f(x) - (ax+b) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est* **asymptote** *au graphe de f en $+\infty$.*

Application 2.5.3 (Position d'une courbe par rapport à une droite asymptote)**.** *On se propose de montrer que la fonction $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ admet une droite asymptote en $+\infty$ et de déterminer la position relative de la courbe et cette asymptote.*

On va montrer que

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = x - 1 + \frac{1}{2x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ce n'est pas un DL, car $x \to +\infty$. Pour pouvoir utiliser la puissance de calcul des DL, on pose $y = \dfrac{1}{x}$. On a $y \to 0^+$ si et seulement si $x \to +\infty$. On calcule :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{y}\sqrt{\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1}} = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \frac{1}{y}\sqrt{(1-y)\left(1 - y + y^2 + \underset{y \to 0}{o}(y^2)\right)} \\
&= \frac{1}{y}\sqrt{1 - y + y^2 + \underset{y \to 0}{o}(y^2) - y + y^2} = \frac{1}{y}\sqrt{1 - 2y + 2y^2 + \underset{y \to 0}{o}(y^2)} \\
&= \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{2}(-2y + 2y^2) - \frac{(-2y)^2}{8} + \underset{y \to 0}{o}(y^2)\right) = \frac{1}{y} - 1 + \frac{y}{2} + \underset{y \to 0}{o}(y).
\end{aligned}$$

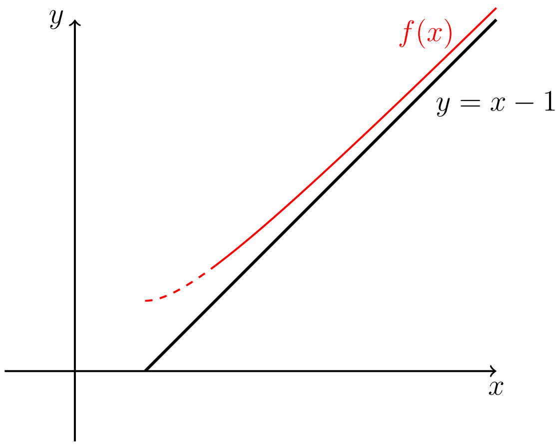


FIGURE 2.8 – Position relative de $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ en rouge par rapport à son asymptote $y = x - 1$ en $+\infty$.

La troisième ligne a été obtenue en utilisant $\sqrt{1+z} = 1 + \dfrac{z}{2} - \dfrac{z^2}{8} + \underset{z\to 0}{o}(z^2)$ avec $z = -2y + 2y^2 + \underset{y\to 0}{o}(y^2) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. En revenant à la variable x, on conclut :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2.4}$$

On en déduit que $f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote au graphe de la fonction f. De plus, comme $\dfrac{1}{2x} > 0$ quand $x \to +\infty$, on en déduit qu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel le graphe de f est au-dessus de l'asymptote (voir figure 2.8).

Application 2.5.4 (Développement asymptotique de fonctions réciproques au voisinage de $+\infty$)**.** *On se propose de donner une bonne estimation de $f^{-1}(y)$ quand $y \to +\infty$ au moyen de fonctions usuelles.*

On commence par déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f^{-1}(y)$. On a

$$\begin{aligned} y = xe^{x^2} &\iff \ln y = \ln(x) + x^2 \iff \sqrt{\ln y} = \sqrt{\ln(x) + x^2} \\ &\iff \sqrt{\ln y} = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2}\right)} = x\sqrt{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln y}.$$

Cet équivalent est très intéressant en lui-même, mais on voudrait être plus précis, c'est-à-dire estimer l'écart entre ces deux fonctions (l'erreur). On calcule en réinjectant la ligne précédente

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - \sqrt{\ln y} &= x - x\sqrt{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}} \\ &= x - x\left(1 + \frac{\ln x}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{\ln x}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2x}. \end{aligned}$$

à la seconde ligne, on a utilisé $\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} + \underset{z\to 0}{o}(z)$ avec $z = \frac{\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Reste à revenir à la variable y dans l'équivalent.

On sait déjà que $x = f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln y}$. Donc

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln f^{-1}(y) = \ln\left(\sqrt{\ln y} + \underset{y\to+\infty}{o}(\sqrt{\ln y})\right) = \ln\left(\sqrt{\ln y}(1 + \underset{y\to+\infty}{o}(1))\right) \\ &= \ln\sqrt{\ln y} + \ln\left(1 + \underset{y\to+\infty}{o}(1)\right) = \ln\sqrt{\ln y} + \underset{y\to+\infty}{o}(\ln\sqrt{\ln y}) \sim_{y\to+\infty} \ln\sqrt{\ln y}. \end{aligned}$$

(On rappelle qu'on ne peut pas en général composer des équivalents par une fonction, d'où les deux lignes de calcul précédent. C'est en fait possible avec la fonction $\ln$, pourvu que les équivalents auxquels on l'applique ne tendent pas vers 1, cf. le TD.) Comme les équivalents s'inversent (2.1.26) et se multiplient (2.1.24), on en déduit que

$$f^{-1}(y) - \sqrt{\ln y} = x - \sqrt{\ln f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2x} = \frac{\ln f^{-1}(y)}{2f^{-1}(y)} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\sqrt{\ln y}}{2\sqrt{\ln y}}.$$

On conclut que

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y} + \frac{\ln\sqrt{\ln y}}{2\sqrt{\ln y}} + \underset{y\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln\sqrt{\ln y}}{2\sqrt{\ln y}}\right). \tag{2.5}$$

2.6 Régularité des fonctions : entre continuité et dérivabilité

2.6.1 Continuité uniforme

On rappelle d'abord qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I si $\forall y \in I$, f est continue en y, c'est-à-dire si

$$\forall y \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

On peut l'interpréter en disant que quel que soit le point y et quelle que soit la précision ε demandée sur l'image $f(y)$, il existe une précision δ à la source telle qu'une valeur approchée x de y avec précision δ donne une valeur approchée $f(x)$ de $f(y)$ avec précision ε.

Définition 2.6.1. *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est* **uniformément continue sur** *I si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in I,\ \forall x \in I,\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2.7}$$

La seule différence avec la continuité usuelle (2.6) est la position des quantificateurs. Pour la continuité uniforme, on demande de pouvoir trouver un δ qui convienne **pour tous les** y **à la fois**. La proposition suivante est évidente si l'on a bien compris le sens de l'ordre des quantificateurs.

Proposition 2.6.2. *Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.*

En fait, la réciproque est fausse comme nous allons le voir bientôt. Pour cela, on reformule la continuité uniforme au moyen de suites.

Proposition 2.6.3. *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si et seulement si pour toutes suites (x_n) et (y_n) de I, si $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Ce résultat est à comparer au corollaire 1.5.5, qui assure que f est continue sur I si et seulement si $\forall y \in I$, si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$, alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(y)$ (c'est-à-dire si et seulement si la condition de la proposition 2.6.3 est vraie pour (y_n) suite constante).

Démonstration. Supposons f uniformément continue sur I, et soient $(x_n), (y_n)$ deux suites telles que $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrons qu'alors $f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Comme $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|x_n - y_n| < \delta$. On en déduit que $\forall n \geq N,\ |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$.

Pour montrer la réciproque, on procède par contraposée. On suppose que f n'est pas uniformément continue sur I. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0,\ \exists x, y \in I,\ |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0.$$

Pour $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$, on obtient $x_n, y_n \in I$ tels que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. On en déduit que $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. □

Application 2.6.4. *La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Cela montre qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas uniformément continues.

Démonstration. Pour $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$, on a bien $x_n - y_n = -\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais

$$f(x_n) - f(y_n) = n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = -2 - \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

□

Si on fait un dessin, on se rend compte que la courbe représentative de $f(x) = x^2$ est « de plus en plus verticale » vers $+\infty$. On devine alors que pour $\varepsilon > 0$ fixé, un δ convenable pour y dans la définition de continuité doit tendre vers 0 quand $y \to +\infty$. Mais il nous faut un $\delta > 0$ uniforme pour tous les y. Ce n'est pas possible pour x^2. On voit que le problème vient ici du comportement à l'infini de la fonction. Le théorème suivant assure que c'est le seul obstacle.

Théorème 2.6.5. *[Théorème de Heine] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soient $(x_n), (y_n)$ deux suites d'éléments de $[a, b]$ telles que $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass 1.7.6, il existe une extraction φ et $\ell \in [a, b]$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On en déduit que $y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ aussi.

Comme f est continue en ℓ, on déduit du corollaire 1.5.5 que $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) - f(\ell) = 0$.

D'après la proposition 2.6.3, f est donc uniformément continue sur $[a, b]$. □

Remarque 2.6.6. Le théorème est encore vrai si on remplace $[a, b]$ par une partie compacte K de $\mathbb{R}$. Voir section 1.10.3.

On verra en L2 que si E et F sont deux espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie) et si $\varphi : E \to F$ est continue, alors elle est uniformément continue. Cette observation est à la base de la notion de norme d'opérateur, aussi appelée norme triple, essentielle à toute l'analyse fonctionnelle.

D'un point de vue plus pragamatique, une fonction uniformément continue peut être approchée par des fonctions « en escalier » au sens de la norme infinie $||f||_{I,\infty} = \sup_{x\in I}\{|f(x)|\}$. C'est utile théoriquement, et en pratique aussi car si on veut tracer une fonction sur un écran d'ordinateur, on ne pourra tracer qu'une approximation en escalier.

2.6.2 Fonctions lipschitziennes

Définition 2.6.7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est* **lipschitzienne** *(ou de Lipschitz) si*

$$\exists K \geq 0,\ \forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Le plus petit K satisfaisant cela est appelé le rapport de Lipschitz de f sur I.

Proposition 2.6.8. *Si f est lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.*

Démonstration. Si $K = 0$, alors f est constante, donc uniformément continue. Supposons $K > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K} > 0$. On a bien

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta = \varepsilon.$$

□

La preuve montre que les fonctions lipschitziennes sont les fonctions uniformément continues pour lesquelles on peut « prendre δ comme une fonction linéaire de ε ».

La proposition suivante fournit de nombreux exemples de fonctions lipschitziennes :

Proposition 2.6.9. *Si f est dérivable sur I et si f' est bornée sur I, alors f est lipschitzienne sur I.*

Démonstration. Soit $K = \sup_{t \in I}\{|f'(t)|\}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que $\forall x, y \in I$, il existe $t \in [x, y]$ (ou $[y, x]$) tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(t)$. On en déduit immédiatement que

$$\forall x, y \in I, \ \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq K.$$

□

Corollaire 2.6.10. *Si f est de classe C^1 sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.*

Démonstration. Comme f' est continue sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$ par le théorème des extrema 2.4.7. □

Exemple 2.6.11. La fonction $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (prouvez-le !), mais n'est lipschitzienne sur aucun voisinage de 0. En effet, pour $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}$ et $y_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n\pi - \frac{\pi}{2}}}$, on a

$$\left|\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

À la vue de la proposition 2.6.8, il est naturel de se demander si toutes les fonctions uniformément continues sont lipschitziennes. La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.6.12. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$. Par contre, elle est uniformément continue sur $[0, 1]$ d'après le théorème de Heine 2.6.5.

En effet, si $\sqrt{x}$ était lipschitzienne, il existerait un $K \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], \ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|.$$

Avec $y = 0$, on en déduirait que $\forall x \in [0, 1], \ \sqrt{x} \leq x$. D'où $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq K$ pour tout $x > 0$. C'est une contradiction, car $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Cet exemple justifie l'introduction d'autres notions de régularité.

Définition 2.6.13. *Soit $\alpha \in]0,1]$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est α-höldérienne sur I si*

$$\exists K \geq 0,\ \forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha.$$

On observe que f est 1-höldérienne si et seulement si elle est lipschitzienne

Exercice 24. Soit $I = [0,1]$.

1. Soit $\alpha \leq \beta$. Montrer que si f est α-höldérienne, alors f est β-höldérienne.
2. Montrer que $f(x) = x^\alpha$ est α-höldérienne.
3. Soit $\beta < \alpha$. Montrer que $f(x) = x^\alpha$ n'est pas β-höldérienne.
4. Montrer que la fonction $f(x) = x \ln x$ se prolonge par continuité en 0. Montrer qu'elle est α-höldérienne pour tout $\alpha \in]0,1[$, mais pas lipschitzienne.
5. Donner un exemple de fonction uniformément continue sur I qui ne soit α-höldérienne pour aucun $\alpha \in]0,1]$.

Les fonctions obtenues lors d'un mouvement brownien (dernière illustration de l'introduction) sont α-höldériennes pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, mais ne sont pas $\frac{1}{2}$-höldériennes.

Ces notions de régularité sont très utiles, notamment pour considérer de bons espaces vectoriels dans lesquels trouver des solutions d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles.