Correction du CC2 du 13 décembre 2024 "Algèbre 1 - HAX708X"

Questions isolées

a. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module $G := \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/80\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$.

On a $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $80 = 2^4 \cdot 5$ et $45 = 3^2 \cdot 5$. Ainsi, le lemma chinois donne

$$\begin{aligned} G &\simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \left(\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right) \times \left(\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}\right) \\ &\simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3600\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les facteurs invariants de G sont $d_1 = 5$, $d_2 = 20$ et $d_3 = 3600$.

b. Déterminer les classes de conjugaison du groupe alterné $A_4 = \{\sigma \in S_4, \epsilon(\sigma) = 1\}$.

Le groupe A_4 compte quatre classes de conjugaison : la classe de l'identité (de cardinal 1), la classe des doubles transpositions (de cardinal 3), la classe de conjugaison du 3-cycle $(1,2,3)$ (de cardinal 4), et la classe de conjugaison du 3-cycle $(1,3,2)$ (de cardinal 4),

c. Soit (V,ρ) une représentation complexe d'un groupe fini G. Montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g) : V \to V$ est un endomorphisme diagonalisable. Quand est-ce que $\mathrm{Tr}(\rho(g)) = \dim V$?

Soit N le cardinal de G et $n = \dim V$. Comme $g^N = e, \forall g \in G$, les endomorphismes $\rho(g)$ sont annulés par le polynôme $X^N - 1$, qui est scindé à racines simples (sur $\mathbb{C}$). Ainsi les $\rho(g)$ sont diagonalisables et il existe des racines N-ièmes de l'unité $\xi_{1,g}, \dots, \xi_{n,g}$ tel que $\mathrm{Tr}(\rho(g)) = \sum_{k=1}^n \xi_{k,g}$. Cela implique que

$$\mathrm{Tr}(\rho(g)) \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,g}| = n = \dim V.$$

L'inégalité triangulaire montre que $\mathrm{Tr}(\rho(g)) = \dim V$ si et seulement si $\xi_{k,g} = 1, \forall k$, c'est à dire si $\rho(g) = Id_V$.

d. Soit G un groupe fini. Notons $\mathcal{Z}[G]$ le centre de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$. Montrer que $\mathcal{Z}[G]$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera une base.

$\chi \in \mathcal{Z}[G]$ si et seulement si $\chi \star \delta_g = \delta_g \star \chi$, $\forall g \in G$. Nous avons

$$\chi \star \delta_g(h) = \sum_{a,b \in G \ ; \ ab=h} \chi(a)\delta_g(b) = \chi(hg^{-1}).$$

De même, $\delta_g \star \chi(h) = \chi(g^{-1}h)$. On a montré que $\chi \in \mathcal{Z}[G]$ si et seulement si $\chi(hg^{-1}) = \chi(g^{-1}h)$, $\forall g, h \in G$. Cette dernière condition est équivalente au fait que χ est constante sur les classe de conjugaison $C_h := \{ghg^{-1}, g \in G\}$. On voit donc que $\mathcal{Z}[G]$ est un sous-espace vectoriel qui admet pour base les fonctions caractéristiques 1_C attachées aux classes de conjugaisons.

Exercice 1

Pour un groupe **abélien** fini G, on définit $\widehat{G} = \{\varphi : G \to \mathbb{C}^* \text{ morphisme de groupe}\}$.

(1) Montrer que $\widehat{G}$ a une structure de groupe abélien.
Le produit de fonctions est la loi de composition interne de $\widehat{G}$. L'élément neutre de $\widehat{G}$ est la fonction constante égale à 1, et l'inverse de $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$ et le morphisme $g \mapsto \frac{1}{\varphi(g)}$.

(2) Expliciter les éléments de $\widehat{G}$ lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Pour $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$, on définit $\varphi_\ell : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ par la relation $\varphi_\ell(k \bmod n) := e^{\frac{2ik\ell\pi}{n}}$. On remarque que $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ est égal à $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\}$.

(3) Montrer que $\widehat{G}$ est isomorphe à G.
On voit que l'application $\theta_n : \ell \bmod n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longmapsto \varphi_\ell \in \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ définit un isomorphisme de groupes.

Le goupe abélien fini G est isomorphe à un produit cartésien $G_1 := \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$ avec $n_1, \dots, n_k \geq 2$. L'application $\Theta : G_1 \to \widehat{G_1}$ définie par

$$\Theta(\ell_1, \dots, \ell_k) = (\theta_{n_1}(\ell_1), \dots, \theta_{n_k}(\ell_k))$$

est un isomorphisme de groupes. Finalement on a montré que $G \simeq G_1 \simeq \widehat{G_1} \simeq \widehat{G}$.

Exercice 2

Soit (V, ρ) une représentation complexe **irréductible** d'un groupe G. On suppose que V est de dimension finie.

(1) *Lemme de Schur* : Soit $T \in \mathrm{End}(V)$ tel que $T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$, $\forall g \in G$. Montrer que T est une homothétie.

Voir le cours.

(2) Montrer que $\rho(h_0)$ est une homothétie pour tout $h_0 \in Centre(G) = \{h \in G, gh = hg \ \forall g \in G\}$.

Soit $h_0 \in Centre(G)$ et $T := \rho(h_0)$. Alors $T \circ \rho(g) = \rho(h_0 g) = \rho(g h_0) = \rho(g) \circ T$ pour tout $g \in G$. D'après le premier point, on en déduit que $T := \rho(h_0)$ est une homothétie.