Contrôle Continu
“Algèbre 1 - HAX708X”

13 décembre 2024

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 1h30

Questions isolées *(10 points)*

a. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})$.

b. Déterminer les classes de conjugaison du groupe alterné $A_4 = \{\sigma \in S_4, \epsilon(\sigma) = 1\}$.

c. Soit (V, ρ) une représentation complexe d'un groupe fini G. Montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g) : V \to V$ est un endomorphisme diagonalisable. Quand est-ce que $\mathrm{Tr}(\rho(g)) = \dim V$?

d. Soit G un groupe fini. Notons $\mathcal{Z}[G]$ le centre de l'algèbre $\mathbb{C}[G]$. Montrer que $\mathcal{Z}[G]$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera une base.

Exercice *(5 points)*

Pour un groupe **abélien** fini G, on définit $\widehat{G} = \{\varphi : G \to \mathbb{C}^* \text{ morphisme de groupe}\}$.

(1) Montrer que $\widehat{G}$ a une structure de groupe abélien.

(2) Expliciter les éléments de $\widehat{G}$ lorsque $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(3) Montrer que $\widehat{G}$ est isomorphe à G

Exercice *(5 points)*

Soit (V, ρ) une représentation complexe **irréductible** d'un groupe G. On suppose que V est de dimension finie.

(1) *Lemme de Schur* : Soit $T \in \mathrm{End}(V)$ tel que $T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$, $\forall g \in G$. Montrer que T est une homothétie.

(2) Montrer que $\rho(h_0)$ est une homothétie pour tout $h_0 \in \mathit{Centre}(G) = \{h \in G, gh = hg \ \forall g \in G\}$.