

Durée : 1h ; calculatrice non autorisée, aucun document autorisé.
Merci de répondre sur le sujet, dans les cadres prévus à cet effet.

Justifier toutes les réponses (un barème indicatif est donné pour chaque question).

Exercice 1 [Dérivée (4 points)]. Soit $f(x, y) = (y + \cos x)(\pi - x + \sin y)$. (a) Donner le domaine de définition de $f(x, y)$. (b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. (c) Est-il vrai que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$?

1 a. Domaine de définition = $\mathbb{R}^2$

2
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y + \cos x)(-1) + (\pi - x + \sin y)(-\sin x)$$

$$= -y - \cos x - \pi \sin x + x \sin x - \sin x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (y + \cos x)(\cos y) + (\pi - x + \sin y)(1)$$

$$= y \cos y + \cos x \cos y + \pi - x + \sin y$$

1
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1 - \sin x \cos y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

D'après le lemme de Schwarz nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

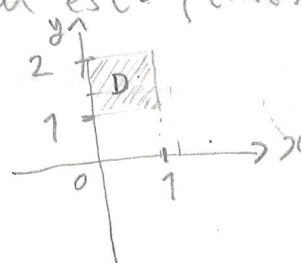
Exercice 2 [Intégrale Double (4 points)]. Soit $f(x, y) = x^2 y + \frac{y}{3} x$. Calculer $\int_0^1 \int_1^2 f(x, y) dy dx$. Donner la représentation de la région d'intégration.

3
$$\int_0^1 \int_1^2 x^2 y + \frac{y}{3} x dy dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{y^2}{2} x \right]_1^2 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 \cdot 4}{2} + \frac{4}{6} x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \right) \right) dx = \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{2}{3} x - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{6} \right) dx$$

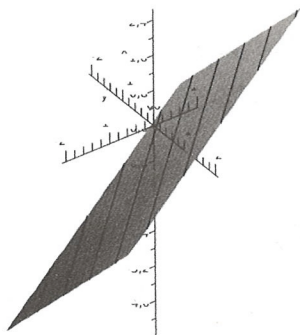
$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{6} x \right) dx = \left[\frac{3}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{6} \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

1 Région d'intégration est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$

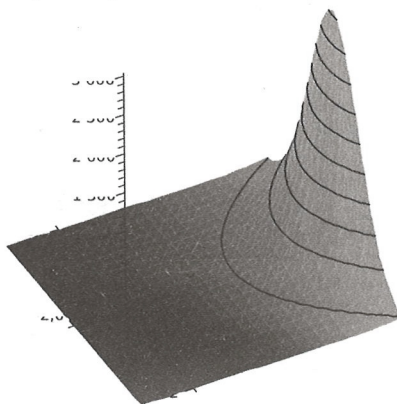


Exercice 3 [Courbes de niveau (5 points)]. Soit $f(x, y) = x + y - 1$ et soit S la surface (représentation graphique) de f dans l'espace.

- 2 a) La surface S contient-elle l'origine ? Qu'en est-il du point $(1, 1, 1)$?
 2 b) Déterminer les courbes de niveau $f(x, y) = k$ pour $k = 0, 1, 2$ (on tracera ces courbes dans le plan).
 1 c) S correspond-t-elle à l'une des deux représentations ci-dessous ? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de S ? (justifiez votre réponse).



(a)

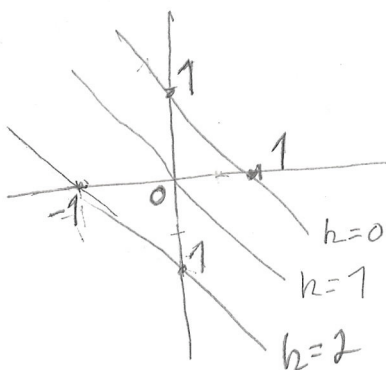


(b)

a) $z = f(x, y) = x + y - 1$

a) $f(0, 0) = 0 + 0 - 1 = -1$ S ne contient pas l'origine
 $f(1, 1) = 1 + 1 - 1 = 1$ S contient le point $(1, 1, 1)$

b) $z = f(x, y) = k \Leftrightarrow x + y - 1 = k \Leftrightarrow y = 1 - x + k, k = 0, 1, 2$



Les courbes de niveau
sont donc de
droites.

c) La surface-graphes de f est donc un plan.
 S correspond à la représentation (a)

Exercice 4 [Extrema (7 points)]. Déterminer les extrema locaux de la fonction $f(x, y) = 3 - x^2 - xy - y^2 + 2y$.

Cherchons les points critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x - y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y + 2$$

On résout le système

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -x - 2(-2x) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4/3 \\ x = -2/3 \end{cases}$$

Il y a donc un seul point critique $(-2/3, 4/3)$
Regardons si $(-2/3, 4/3)$ est un point extrêmeum.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Nous avons

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2/3, 4/3) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2/3, 4/3) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2/3, 4/3) \right)^2$$

$$= (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Donc, $(-2/3, 4/3)$ est soit un maximum ou un minimum.

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1 < 0$ alors $(-2/3, 4/3)$ est un maximum local.