

Solutions TD 4 : Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1.

a) Le domaine de définition est \mathbb{R}^2

b) $f(1, 2) = 2 - 1^2 = 1$.

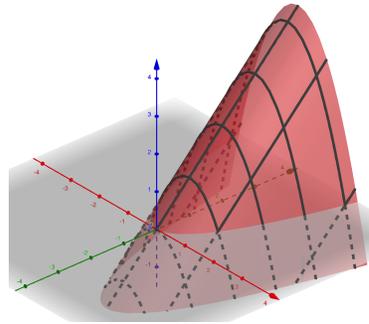
c) $S_f \cap \{z = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 = y - x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. De même,

$S_f \cap \{z = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1\}$ et $S_f \cap \{z = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2\}$.

Les courbes de niveau sont de paraboles.

d) $S_f \cap \{x = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = y\}$. Une droite passant par l'origine avec une pente de 45 degré.

e)



Exercice 2.

a) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$.

Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y + 2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$$

Ces fonctions sont bien définies sur \mathbb{R}^2 . Nous devons donc résoudre le système : $x + 2y + 2 = 0$, $2x + 2y = 0$. Nous trouvons la solution $x = -1$ et $y = 1$.

D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 1) \right)^2 = 4 \cdot 2 - 4 = 2 > 0$$

Le point critique $(-1, 1)$ est soit un maximum ou un minimum. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) = 4 > 0$ nous avons un minimum en $f(-1, 1)$.

b) $f(x, y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$.

Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -10x + 4y + 16 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 2y$$

Ces fonctions sont bien définies sur \mathbb{R}^2 . Nous devons donc résoudre le système : $-10x + 4y + 16 = 0$, $4x - 2y = 0$. Nous trouvons la solution $x = 8$ et $y = 16$.

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8, 16) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(8, 16) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(8, 16) \right)^2 = (-10) \cdot (-2) - 4^2 = 4 > 0$$

Le point critique $(8, 16)$ est soit un maximum ou un minimum. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8, 16) = -10 < 0$ nous avons un maximum en $f(8, 16)$.

c) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8$.

Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 4$$

Ces fonctions sont bien définies sur \mathbb{R}^2 . Nous devons donc résoudre le système : $2x + 4 = 0$, $-2y - 4 = 0$. Nous trouvons la solution $x = -2$ et $y = -2$.

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, -2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2, -2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2, -2) \right)^2 = (2) \cdot (-2) - 0^2 - 4 < 0$$

Nous avons un point selle en $f(-2, -2)$.

d) $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$.

Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} + x(-2x)e^{-x^2-y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -x(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

Ces fonctions sont bien définies sur \mathbb{R}^2 . Nous devons donc résoudre le système : $(1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0$, $-2xye^{-x^2-y^2} = 0$. Comme $e^t > 0$ pour tout t alors, d'après la première équation on obtient $1 - 2x = -0$ et donc $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ et de la deuxième équation on en déduit que $y = 0$.

D'autre part , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -4xe^{-x^2-y^2} + (1 - 2x^2)(-2x)e^{-x^2-y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2xe^{-x^2-y^2} - 2xy(-2y)e^{-x^2-y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2ye^{-x^2-y^2} - 2xy(-2x)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

On obtient,

En $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

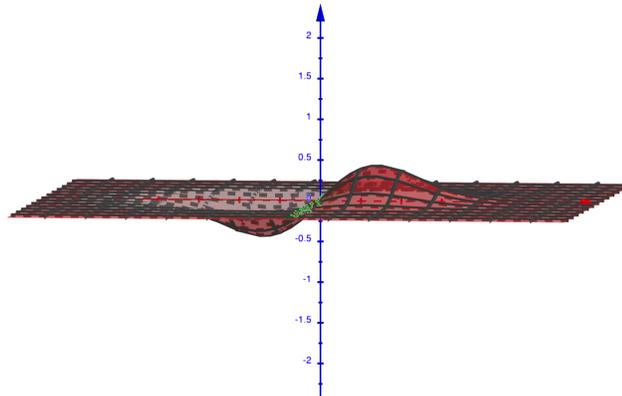
$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \right)^2 = (-2\sqrt{2}e^{-1/2})(-\sqrt{2}e^{-1/2}) - 0^2 = 4e^{-1} > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$ nous avons un maximum local en $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \right)^2 = (2\sqrt{2}e^{-1/2})(\sqrt{2}e^{-1/2}) - 0^2 = 4e^{-1} > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0$ nous avons un minimum local en $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.



e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 1$.

Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{2/3}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{2/3}}$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. De plus, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ ces deux fonctions sont non nulles, donc le seul point critique se trouve en $(0, 0)$. Donc si f admet un extremum local celui-ci se trouve en $(0, 0)$.

Nous avons $f(0, 0) = 1 \leq 1 + (x^2 + y^2)^{1/3} = f(x, y)$ car $(x^2 + y^2)^{1/3} \geq 0$. On en déduit que $f(0, 0) = 1$ est un minimum local (même global) de f

f) $f(x, y) = x^2 + y^4$.

Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

Ces fonctions sont bien définies sur \mathbb{R}^2 . Nous devons donc résoudre le système : $2x = 0$, $4y^3 = 0$. Nous trouvons la solution $x = 0$ et $y = 0$.

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right)^2 = (2) \cdot (0) - 0^2 = 0$$

Nous ne pouvons pas conclure avec le critère habituelle. Cependant, nous avons $f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^4 = f(x, y)$ pour tout x, y . donc $f(0, 0)$ est un minimum global.

Exercice 3.

(i) $f(x, y) = 3e^{-x^2 - y^2}$

Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6xe^{-x^2 - y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -6ye^{-x^2 - y^2}$$

Nous avons un point critique en $(0, 0)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6e^{-x^2 - y^2} + (-6x)e^{-x^2 - y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6xe^{-x^2 - y^2} - 6y(-2y)e^{-x^2 - y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -12xye^{-x^2 - y^2} \end{aligned}$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \right)^2 = (-6)(-6) - 0^2 = 36 > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -6 < 0$ nous avons un maximum local en $f(0,0)$. La figure (b) représente cette situation.

(ii) $f(x, y) = x + y + 2xy - x^2 - y^2$

Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2y - 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2x - 2y$$

Ces fonctions sont bien définies sur \mathbb{R}^2 . Nous avons le système : $1 + 2y - 2x = 0$, $1 + 2x - 2y = 0$. En additionnant ces deux égalités, on obtient que $2 = 0$ ce qui est une contradiction. Donc, on en déduit que ce système n'admet pas de solution. Alors, f ne possède pas de point critique (pas d'extremum). La figure (c) représente cette situation.

(iii) $f(x, y) = 4e^{xy}$

Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4ye^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4xe^{xy}$$

Nous avons un point critique en $(0,0)$. D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4e^{xy} + 4yx e^{xy}$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \right)^2 = (0)(0) - 4^2 = -16 < 0$$

Nous avons donc un point selle. La figure (a) représente cette situation.

Exercice 4.

$$D(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120$$

Il suffit de trouver les valeurs de x et y pour lesquelles la fonction D est minimale. Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 2x - 18 + 2y \text{ et } \frac{\partial D}{\partial y} = 4y - 24 + 2x$$

Ces fonctions sont bien définies sur \mathbb{R}^2 . Nous devons donc résoudre le système : $2x - 18 + 2y = 0$, $4y - 24 + 2x = 0$. Nous trouvons la solution $x = 6$ et $y = 3$.

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = 4 \text{ et } \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = 2$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(6, 3) \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(6, 3) - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}(6, 3) \right)^2 = (2)(4) - 2^2 = 4 > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(6, 3) = 2 > 0$ nous avons un minimum local en $f(6, 3)$.

Exercice 5. Notons par x, y et z la longueur, la largeur et l'hauteur de la boîte respectivement. Le volume est donné par $xyz = 32$ et donc $z = \frac{32}{xy}$. De plus, la surface est donnée par $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$. Nous sommes donc amenés à chercher le minimum de la fonction à deux variables

$$S(x, y) = xy + 2x \frac{32}{xy} + 2y \frac{32}{xy} = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} \text{ et } \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La situation quand $x = y = 0$ n'est pas envisageable car dans ce cas nous ne pouvons pas avoir un volume de $32m^3$. Nous devons donc résoudre le système : $x - \frac{64}{y^2} = 0$, $y - \frac{64}{x^2} = 0$ lorsque $x, y \neq 0$. On peut réécrire le système comme $xy^2 = 64$, $yx^2 = 64$ et donc on obtient $xy^2 - yx^2 = 0$ et, en divisant par xy , on a $y - x = 0$ et donc $y = x$, d'où, nous trouvons la solution $x = 4$ et $y = 4$ (et donc $z = 2$).

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{128}{y^3} \text{ et } \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(4, 4) \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(4, 4) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(4, 4) \right)^2 = \left(\frac{128}{4^3} \right) \left(\frac{128}{4^3} \right) - 1^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(4, 4) = 2 > 0$ nous avons bien un minimum local en $f(4, 4)$.

Conclusion : les dimensions $4 \times 4 \times 2$ donnent une surface minimale pour un volume de $32m^3$.

Exercice 6.

a) $w_1 = 2xydx + x^2dy$

On pose $F(x, y) = 2xy$ et $G(x, y) = x^2$. Nous avons que $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x = \frac{\partial G}{\partial x}$. En plus, w_1 est définie sur l'ouvert étoilé \mathbb{R}^2 . Donc w_1 est bien exacte.

On cherche $f(x, y)$ tel que $df = w_1$. Ceci équivaut à résoudre le système :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

En intégrant la première équation par rapport à x on trouve $f(x, y) = yx^2 + c(y)$. En dérivant cette expression par rapport à y nous trouvons $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y)$. En identifiant cette équation avec la deuxième équation du système on a $x^2 + c'(y) = x^2$. Il s'ensuit que $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = k, k \in \mathbb{R}$.

Par suite, la fonction f cherchée est $f(x, y) = x^2y + k$.

b) $w_2 = xydx - zdy + xzdz$

Rappel : la forme différentielle $w = Fdx + Gdy + Hdz$ est exacte si w est étoilée et $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}$.

On pose $F = xy, G = -z$ et $H = xz$. On constate que $\frac{\partial F}{\partial y} = x \neq 0 = \frac{\partial G}{\partial x}$ donc w_2 n'est pas exacte.

c) $w_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$

On pose $F = xe^{x^2-y}$ et $G = -2e^{x^2-y}$. On constate que $\frac{\partial F}{\partial y} = -2xe^{x^2-y} \neq -4xe^{x^2-y} = \frac{\partial G}{\partial x}$ donc w_3 n'est pas exacte.

d) $w_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$

On pose $F = yz^2, G = xz^2$ et $H = 2xyz + 2z + y$. On a $\frac{\partial F}{\partial y} = z^2 = \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial z} = 2x + 1 = \frac{\partial H}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = 2zy = \frac{\partial H}{\partial x}$. En plus w_4 est définie sur l'ouvert étoilé \mathbb{R}^3 . Donc, w_4 est bien exacte.

Cherchons maintenant f telle que $df = w_4$. Ceci équivaut à résoudre le système :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + 2z + y$$

En intégrant la première équation par rapport à x on trouve $f = xyz^2 + \varphi(y, z)$. En dérivant cette expression par rapport à y et en égalisant avec la deuxième équation du système on a

$$xz^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz^2 + z \text{ qui équivaut à } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z$$

En dérivant $f = xyz^2 + \varphi(y, z)$ par rapport à z et en égalisant avec la troisième équation du système on a

$$2xyz + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \text{ qui équivaut à } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z + y$$

En intégrant $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z$ par rapport à y il vient $\varphi(y, z) = zy + c(z)$. En dérivant cette expression par rapport à z on trouve $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y + c'(z)$ et en utilisant que $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z + y$ on trouve

$$y + c'(z) = 2z + y,$$

c'est-à-dire $c'(z) = 2z$. Donc, en intégrant cette expression par rapport à z on a $c(z) = z^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f cherchée est

$$f(x, y, z) = xyz^2 + \varphi(y, z) = xyz^2 + zy + c(z) = xyz^2 + zy + z^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. $w = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$.

(a) Nous avons $F = x^2 + y^2 + 2x$ et $G = 2y$. On a $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0 = \frac{\partial G}{\partial x}$. Donc w n'est pas exacte.

(b) On va trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que $\varphi(x)w = df$. On remarque que w est définie sur \mathbb{R}^2 qui est étoilé. On voudrait que $\varphi(x)w$ soit exacte pour que f existe. Il faut donc que

$$\frac{\partial(\varphi(x)(x^2 + y^2 + 2x))}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi(x)(2y))}{\partial x}$$

Ceci équivaut $2y\varphi(x) = 2y\varphi'(x)$ pour tout x . Autrement dit, $\varphi(x) = \varphi'(x)$, donc $\varphi(x) = ke^x$, k -constante (on verra comment on trouve cette solution plus tard dans le cours). On peut choisir n'importe quelle valeur réelle pour k , prenons $k = 1$.

Ainsi,

$$\varphi w = e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + e^x(2y)dy.$$

Cherchons ensuite f telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(2y)$$

En intégrant la deuxième égalité par rapport à y , on trouve

$$f(x, y) = e^xy^2 + c(x)$$

En dérivant cette expression par rapport à x on a $\frac{\partial f}{\partial x} = e^xy^2 + c'(x)$ et en utilisant $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$ on trouve

$$e^xy^2 + c'(x) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$$

c'est-à-dire, $c'(x) = e^x(x^2 + 2x)$. En intégrant cette expression par rapport à x , on a $c(x) = x^2e^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Donc, $f(x, y) = e^xy^2 + x^2e^x + k = e^x(y^2 + x^2) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 8. $w = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

a) w est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) On paramètre le cercle C par $x = \cos t, y = \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et donc $dx = -\sin t, dy = \cos t$. On obtient

$$\int_C w = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t))dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

c) w n'est pas exacte, sinon son intégrale curviligne sur la courbe fermée C serait nulle et cela contredit (b). Remarquons cependant que

$$\frac{\partial(\frac{-y}{x^2+y^2})}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial(\frac{x}{x^2+y^2})}{\partial x}$$

Le domaine de définition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas étoilé (il y a un trou). En fait, $\int_C w$ n'est pas nulle car le cercle entoure le trou.

Exercice 9.

a) $w = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x + 1$ joignant les points $(0, -1)$ et $(0, 1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.

On paramètre C par $y = t, x = \frac{t^2-1}{2}$ et donc $dy = dt$ et $dx = t dt$ avec t variant en croissant de -1 à 1 . On obtient

$$\int_C w = \int_{-1}^1 \left(\frac{\frac{t^2-1}{2}}{(\frac{t^2-1}{2})^2 + t^2} t + \frac{t}{(\frac{t^2-1}{2})^2 + t^2} \right) dt$$

On rappelle que si une fonction $f(x)$ est impaire (c'est-à-dire $f(-t) = -f(t)$) alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ (par la symétrie centrale).

On pourra vérifier que $f(t) = \frac{\frac{t^2-1}{2}}{(\frac{t^2-1}{2})^2 + t^2} t + \frac{t}{(\frac{t^2-1}{2})^2 + t^2}$ est une fonction impaire et donc $\int_C w = 0$.

b) $w = (x - y^3) dx + x^3 dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.

On paramètre le cercle C par $x = \cos t, y = \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et donc $dx = -\sin t, dy = \cos t$. On obtient

$$\begin{aligned}
 \int_C w &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t))dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t)dt \\
 &= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t)dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin^2(2t)}{2} - \frac{\sin(2t)}{2}\right)dt \quad (\text{en utilisant } \sin(2x) = 2 \sin x \cos x) \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4}(1 - \cos(4t)) - \frac{\sin(2t)}{2}\right)dt \quad (\text{en utilisant } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}) \\
 &= \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t)dt - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos(4t)dt \\
 &= [t]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{t}{4}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{2\pi}{4} + \frac{1}{4}(0) \\
 &= 2\pi - \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

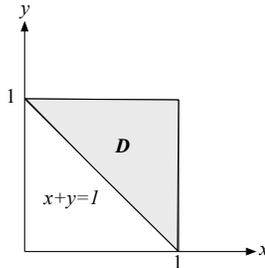
c) $w = xyz \, dx$ et C est l'arc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$. On a $dx = -\sin t \, dt$ et t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \int_C w &= \int_0^{2\pi} (\cos t)(\sin t)(\cos t \sin t)(-\sin t \, dt) \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t(-\sin t)(\sin^2 t) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t(-\sin t)(1 - \cos^2 t) \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t(-\sin t) + \cos^4 t \sin t \, dt \\
 &= \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{2\pi} \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\
 &= -\frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

Exercice 10. Calculer les intégrales multiples suivantes :

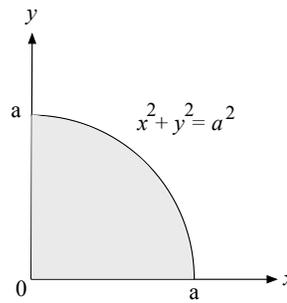
a) $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, y \leq 1, x+y \geq 1\}$.

Le domaine d'intégration est donnée dans la figure ci-dessous



$$\begin{aligned}
 \iint_D (x+y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x+y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{1-x}^1 dx \\
 &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

b) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy^2 \, dy \, dx$. Le domaine d'intégration est donnée dans la figure ci-dessous



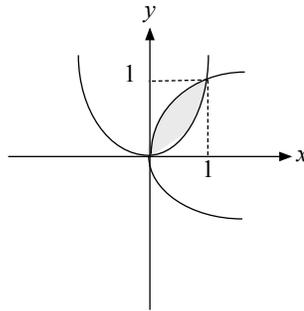
$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy^2 \, dy \, dx &= \int_0^a x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
 &= \int_0^a x \frac{(\sqrt{a^2-x^2})^3}{3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^a x (\sqrt{a^2-x^2})^3 dx.
 \end{aligned}$$

On pose $u = a^2 - x^2$ donc $du = -2x dx$ et donc $-\frac{du}{2} = x dx$. Par ailleurs, pour $x = 0$ on a $u = a^2$ et pour $x = a$ on a $u = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \int_0^a x (\sqrt{a^2-x^2})^3 dx &= \frac{1}{3} \int_0^a u^{3/2} \left(-\frac{du}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{6} \left[\frac{2}{5} u^{5/2} \right]_0^a \\
 &= -\frac{1}{6} \left(-\frac{2}{5} (a^2)^{5/2} \right) = \frac{1}{15} a^5.
 \end{aligned}$$

c) $\iint_D xy \, dx \, dy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.

Le domaine d'intégration est donné dans la figure ci-dessous

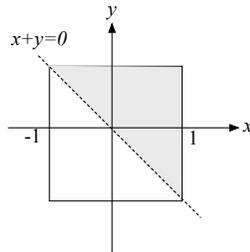


$$\begin{aligned}
 \iint_D xy \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \right) x \, dx \\
 &= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 - x^5 \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

Exercice 11.

a) $\int \int_{[-1,1]^2} |x+y| \, dx dy.$

Si l'on pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = |x+y|$ alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$ ou encore f prend les mêmes valeurs en deux points symétrique par rapport à l'origine. Puisque l'origine est centre de symétrie $[-1, 1]^2$ on en déduit que



$$\begin{aligned}
 \int \int_{[-1,1]^2} f(x, y) \, dx dy &= \int \int_{\substack{-1 \leq x, y \leq 1 \\ x+y \geq 0}} f(x, y) \, dx dy + \int \int_{\substack{-1 \leq x, y \leq 1 \\ x+y \leq 0}} f(x, y) \, dx dy \\
 &= 2 \int \int_{\substack{-1 \leq x, y \leq 1 \\ x+y \geq 0}} f(x, y) \, dx dy \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^1 (x+y) dy \right) dx \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^1 dx \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
 &= 2 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1 \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \\
 &= 2 \left(1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{6} \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

b) $\int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx dy.$

En passant en coordonnées polaires avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On rappelle que

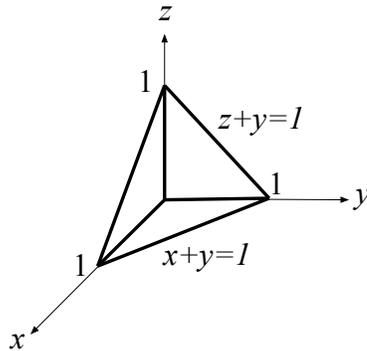
$$\int \int_A f(x, y) dA = \int \int_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 \int \int_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx dy &= \int \int_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \frac{r}{1+r^2} \, dr \, d\theta \\
 &= \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} \, dr \right) \int_0^{2\pi} d\theta \quad (\text{intégrales indépendantes}) \\
 &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 \times 2\pi \\
 &= \pi \ln 2.
 \end{aligned}$$

c) $\int \int \int_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz \, dx dy dz.$

Le domaine d'intégration est donnée dans la figure ci-dessous



$$\begin{aligned}
 \int \int \int_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz \, dx dy dz &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_y^1 z \, dz \right) y \, dy \right) x \, dx \\
 &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{2} (1 - y^2) y \, dy \right) x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_x^1 y - y^3 \, dy \right) x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_x^1 x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) x \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - 2x + x \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

Exercice 12.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

Rappel : $dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz$ où

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta$$

(a)

$$dx = \cos \varphi \cos \theta dr - r \sin \varphi \cos \theta d\varphi - r \sin \theta \cos \varphi d\theta$$

$$dy = \cos \varphi \sin \theta dr - r \sin \varphi \sin \theta d\varphi + r \cos \theta \cos \varphi d\theta$$

$$dz = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

b)

$$x dx = r \cos^2 \varphi \cos^2 \theta dr - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta d\varphi - r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi d\theta$$

$$y dy = r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta dr - r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta d\varphi + r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi d\theta$$

$$z dz = r \sin^2 \varphi dr + r^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi$$

En additionnant, on obtient $x dx + y dy + z dz = r dr$. On en déduit que

$$x dx + y dy + z dz = r dr = r \left(\frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz \right)$$

Ainsi, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ et $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$.