Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Licence 2 - HAC310X Mathématiques pour la Chimie S3

Solutions - Devoir Encadré No 2

Problème 1. a) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$. On détermine le domaine de définition D_f. On cherche les valeurs x et y tels que $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$. On a clairement que si $x > 0$ alors $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$. On a ainsi que si $x \geq 0$

$$x+\sqrt{x^2+y^2} > 0 \iff \sqrt{x^2+y^2} > -x \iff x^2+y^2 > (-x)^2 = x^2 \iff y^2 > 0 \iff y \neq 0.$$

Donc, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ ou } y \neq 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

b) $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$, $D_f = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin x \cos x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cos y(-\sin y).$$

c) $f(x,y,z) = x^2y^2\sqrt{z}$, $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$$

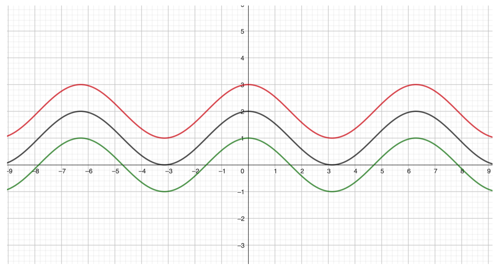
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2\sqrt{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y^2\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

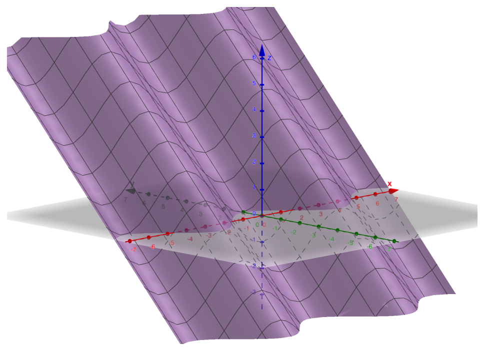
Problème 2. Soit $f(x,y) = y - \cos x$

a) $f(0,0) = 0 - \cos 0 = -1$ donc l'origine n'appartient pas à la surface par contre $(0,0,-1)$ appartient à S_f.

b) Nous avons $k = z = f(x,y) = y - \cos x$ et alors $y = \cos x + k$. Ma figure suivant illustre les cas $k = 0, 1, 2$.



c)



Problème 3. Cherchons les points critiques de $f(x;y) = x^3 + y^2 - 3x - 4y + 2$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0$, et on trouve la solution $x = \pm 1$ et $y = 2$. Nous avons donc deux points critiques $(1, 2)$ et $(-1, 2)$.

Maintenant, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Alors,

En $(1, 2)$:

$$\mathit{\Delta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)\right)^2 = 6 \times 2 - 0 = 12 > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$ alors $(1, 2)$ est un minimum local.

En $(-1, 2)$:

$$\mathit{\Delta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,2)\right)^2 = -6 \times 2 - 0 = -12 < 0$$

alors $(-1, 2)$ est un point selle.

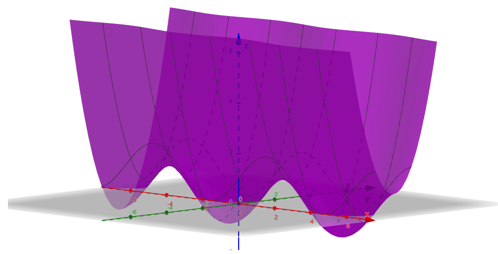
Problème 4. Cherchons les points critiques de $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0$, et on trouve la solution $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ et $y = 1$. Nous avons que les points critiques sont de la forme $((\frac{1}{2} + k)\pi, 1)$.

Maintenant, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Alors,

$$\mathit{\Delta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((\frac{1}{2}+k)\pi, 1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((\frac{1}{2}+k)\pi, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((\frac{1}{2}+k)\pi, 1)\right)^2 = -\sin((\frac{1}{2}+k)\pi) \times 2 - 0 = (-1)^{k+1}(2)$$

Par conséquent, si k est impaire alors $\Delta > 0$ et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$ alors $((\frac{1}{2}+k)\pi, 1)$ est un minimum local. Si k est pair alors $\Delta < 0$ est $((\frac{1}{2}+k)\pi, 1)$ est un point selle.



Problème 5. Soit $w = (4x+3y)dx + (3x+8y)dy$. Le domaine est $\mathbb{R}^2$ et donc étoilé. Désignons $F = 4x+3y$ et $G = 3x+8y$. Par ailleurs, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3 = \frac{\partial G}{\partial x}$ et donc w est fermée, impliquant que w est exacte.

Trouvons f telle que $df = w$.

On a $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x+3y$ et donc

$$f = 2x^2 + c(y). \tag{0.1}$$

En plus, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x+8y = \frac{\partial(2x^2+c(y))}{\partial y} = c'(y)dy$. On a donc $c'(y)dy = 3x+8y$ et en intégrant par rapport à y on obtient $c(y) = 3xy+4y^2$. En replaçant ce valuer de $c(y)$ dans (0.1) on obtient

$$f = 2x^2 + 3xy + 4y^2.$$

Problème 6.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_x^{2x} (x^2+y^2)dydx &= \int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2x} dx \\
&= \int_0^2 \left(x^2 2x + \frac{(2x)^3}{3} - (x^2x + \frac{x^3}{3}\right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - \frac{4x^3}{3}\right) dx \\
&= \int_0^2 \frac{10x^3}{3} dx \\
&= \frac{10}{3}\left[\frac{x^4}{3}\right]_0^2 \\
&= \frac{10}{3}\frac{2^4}{4} \\
&= \frac{40}{3}.
\end{aligned}$$

La région d'intégration est illustrée en bleu