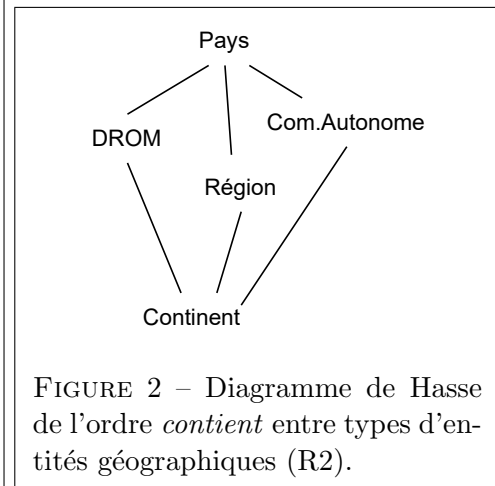
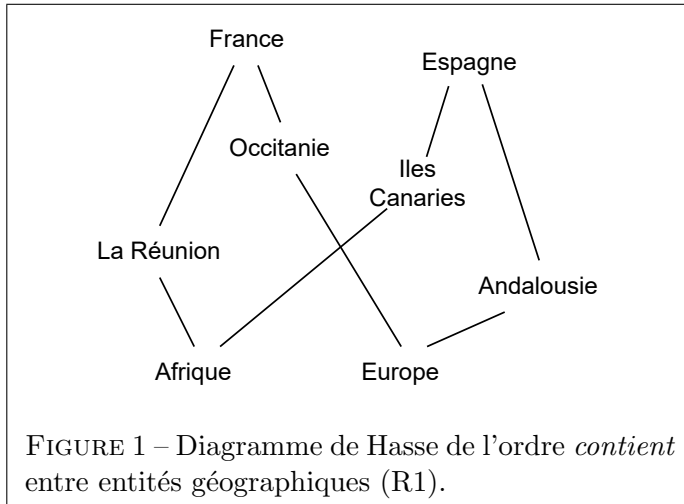


## Ordres, Treillis et Induction (Correction)

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00

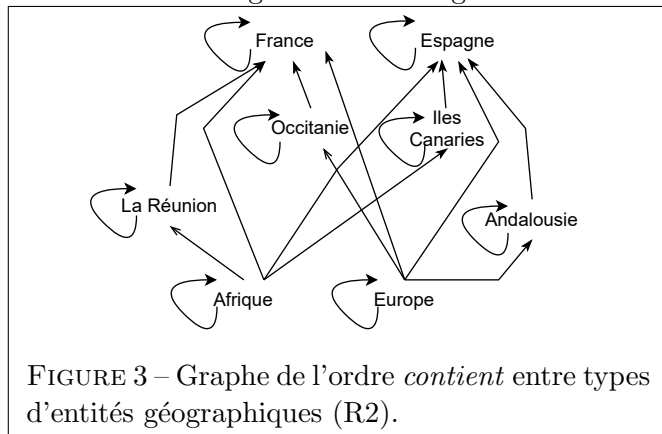
Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

### 1 Partie sur les ordres et les treillis (10 points)



**Question 1.** Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la figure 1 est le diagramme de Hasse.

La réponse est donnée à la figure 3.



**Question 2.** Pour le sous-ensemble  $\{France, Espagne\}$  :

a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera  $Min(\{France, Espagne\})$ .

**Réponse :**  $\{Afrique, Europe\}$

b- L'ensemble de minorants  $Min(\{France, Espagne\})$  admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant le cas échéant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?

**Réponse :** *Afrique et Europe sont incomparables, donc il n'y a pas d'unique plus grand élément*

c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera  $Maj(\{France, Espagne\})$ .

**Réponse :**  $\emptyset$

d- L'ensemble de majorants  $Maj(\{France, Espagne\})$  admet-il un unique plus petit élément (justifiez) ? **Réponse :** *il n'en admet pas puisqu'il est vide.*

**Question 3.** Pour le sous-ensemble  $\{LaReunion, IlesCanaries\}$  :

a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera  $Min(\{LaReunion, IlesCanaries\})$ .

**Réponse :**  $\{Afrique\}$

b- L'ensemble de minorants  $Min(\{LaReunion, IlesCanaries\})$  admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant le cas échéant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?

**Réponse :** il admet un seul élément, c'est donc aussi le plus grand et il est unique (*Afrique*)

c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera  $Maj(\{LaReunion, IlesCanaries\})$ .

**Réponse :**  $\emptyset$

d- L'ensemble de majorants  $Maj(\{LaReunion, IlesCanaries\})$  admet-il un unique petit grand élément (justifiez) ?

**Réponse :** il n'en admet pas puisqu'il est vide.

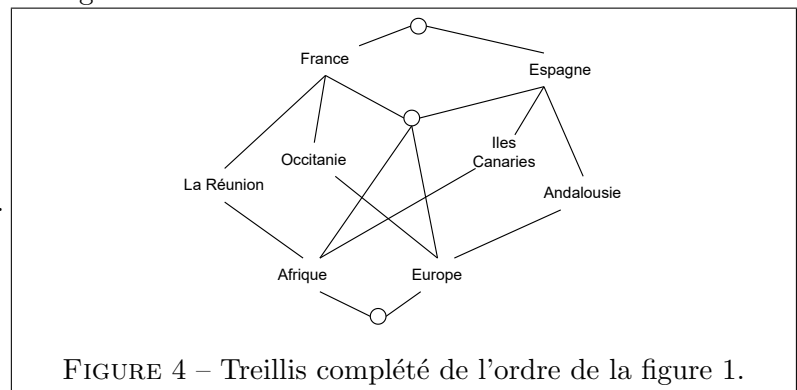
**Question 4.**

a- Le diagramme de Hasse de la figure 1 correspond à un ordre partiel qui n'est pas un treillis. Indiquez pourquoi avec trois exemples de situations présentes dans cet ordre partiel mais interdites dans un treillis.

**Réponse :** le sous-ensemble  $\{France, Espagne\}$  n'admet pas d'infimum ; le sous-ensemble  $\{France, Espagne\}$  n'admet pas de supremum ; le sous-ensemble  $\{Afrique, Europe\}$  n'admet pas d'infimum, ni de supremum (2 majorants directs incomparables).

b- Complétez le diagramme de Hasse en ajoutant un ou plusieurs nouveaux sommets et de nouvelles relations de manière à ce qu'il devienne le diagramme de Hasse d'un treillis. La relation d'ordre entre les sommets initiaux doit rester inchangée.

La réponse est donnée à la figure 4.



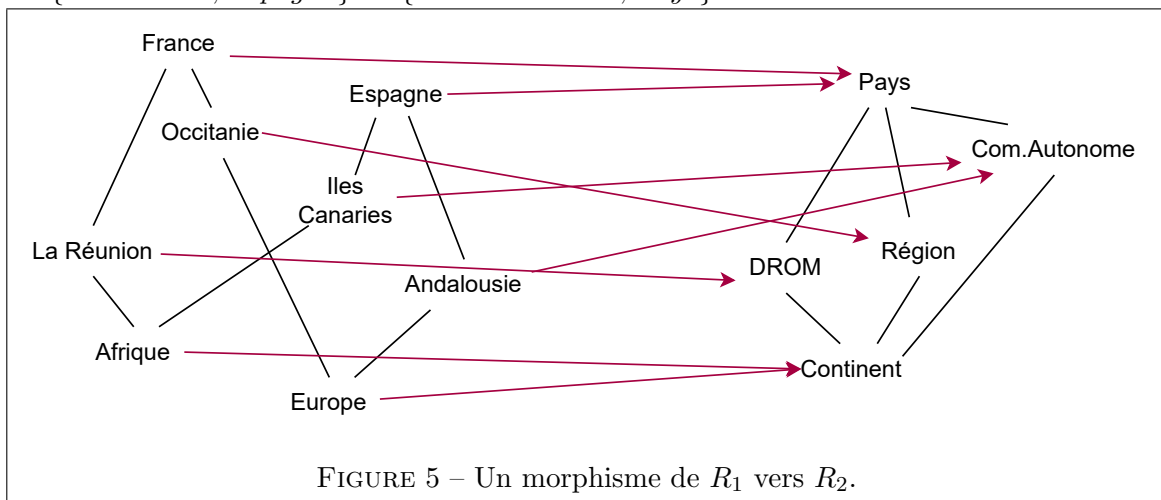
**Question 5.**

a- Définir un morphisme d'ordre dont le domaine (source) soit l'ordre  $R_1$  correspondant au diagramme de Hasse de la figure 1 et le co-domaine (cible) soit l'ordre  $R_2$  correspondant au diagramme de Hasse de la figure 2. Indiquez ensuite comment ce morphisme projette chaque arc du diagramme de Hasse de  $R_1$  vers un arc du diagramme de Hasse de  $R_2$ .

Une réponse possible est donnée à la figure 5.

Projections des arcs :

- $\{Afrique, LaReunion\} \rightarrow \{Continent, DROM\}$
- $\{Afrique, IlesCanaries\} \rightarrow \{Continent, Com.Autonome\}$
- $\{Europe, Occitanie\} \rightarrow \{Continent, Region\}$
- $\{Europe, Andalousie\} \rightarrow \{Continent, Com.Autonome\}$
- $\{LaReunion, France\} \rightarrow \{DROM, Pays\}$
- $\{Occitanie, France\} \rightarrow \{Region, Pays\}$
- $\{IlesCanaries, Espagne\} \rightarrow \{Com.Autonome, Pays\}$
- $\{Andalousie, Espagne\} \rightarrow \{Com.Autonome, Pays\}$

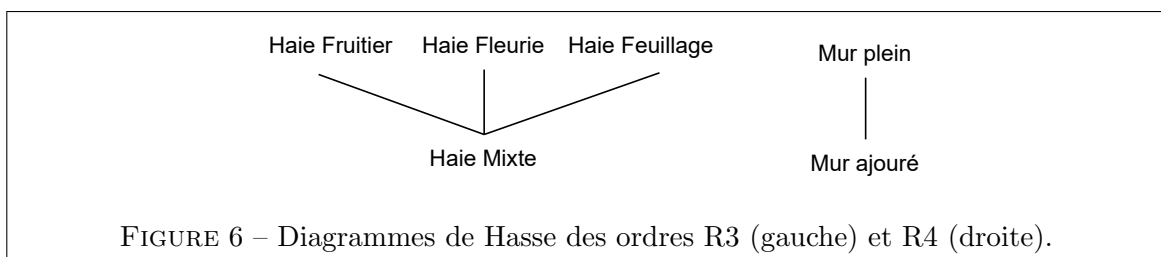


b- Ce morphisme est-il injectif? Justifiez.

**Réponse :** Il n'est pas injectif car *France* et *Espagne* ont la même image (*Pays*).

c- Ce morphisme est-il surjectif? Justifiez.

**Réponse :** Il est surjectif, car tout élément de  $R_2$  a une pré-image dans  $R_1$ .

**Question 6.**

Soient les deux ordres  $R_3$  et  $R_4$  dont les diagrammes de Hasse sont donnés à la figure 6. Dessinez le diagramme de Hasse du produit direct  $R_3 \times R_4$  de ces deux ordres.

La réponse est donnée à la figure 7.

