Ordres, Treillis et Induction

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00
Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

1 Partie sur les ordres et les treillis (1h) ***À rendre sur une copie indépendante***

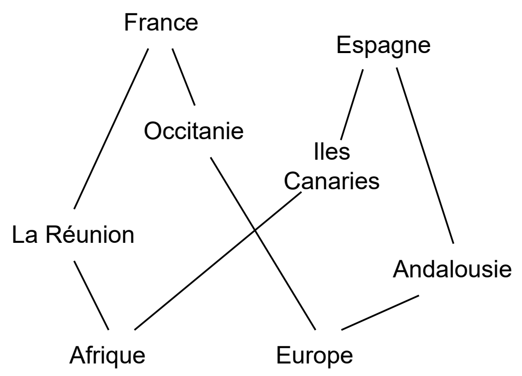

FIGURE 1 – Diagramme de Hasse de l'ordre *contient* entre entités géographiques (R1).

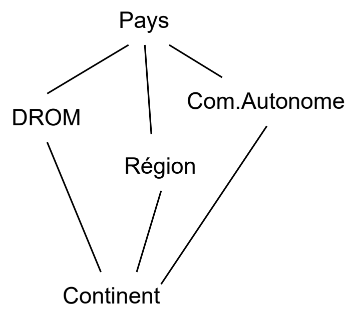

FIGURE 2 – Diagramme de Hasse de l'ordre *contient* entre types d'entités géographiques (R2).

Question 1. Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la figure 2 (ordre *contient* entre **types** d'entités géographiques) est le diagramme de Hasse.

Question 2. Avec la figure 1 (ordre *contient* entre entités géographiques) :
a- Donnez l'ensemble de majorants de l'ensemble $\{Afrique\}$, que l'on notera $Maj(\{Afrique\})$.
b- Quel est ou quels sont les plus petits éléments de $Maj(\{Afrique\})$?
c- Donnez l'ensemble de majorants de l'ensemble $\{Europe\}$, que l'on notera $Maj(\{Europe\})$.
d- Quel est ou quels sont les plus petits éléments de $Maj(\{Europe\})$?
e- Donnez l'ensemble de majorants de l'ensemble $\{Afrique, Europe\}$, que l'on notera $Maj(\{Afrique, Europe\})$.
f- Quel est ou quels sont les plus petits éléments de $Maj(\{Afrique, Europe\})$?

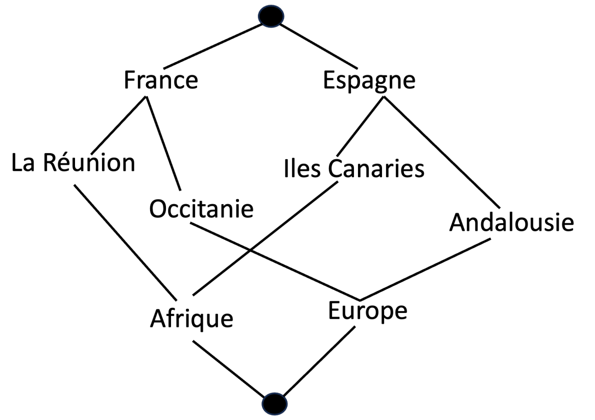

FIGURE 3 – Diagramme de Hasse H1

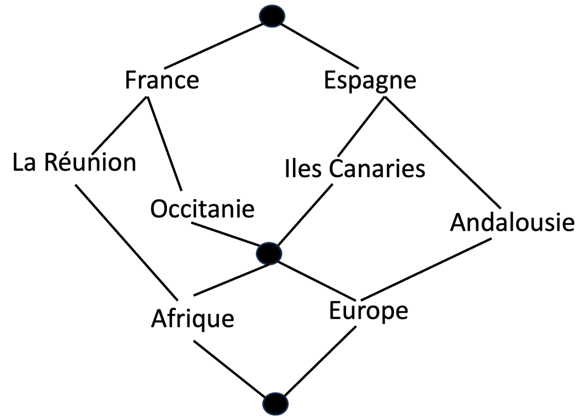

FIGURE 4 – Diagramme de Hasse H2

Question 3.
a- Expliquez pourquoi le diagramme de Hasse H1 de la figure 3 n'est pas le diagramme de Hasse d'un treillis complétant l'ordre partiel dont la figure 1 est le diagramme de Hasse. Par complétion, on entend l'ajout d'un ou plusieurs nouveaux sommets et de nouvelles relations de manière à ce qu'il devienne le diagramme de Hasse d'un treillis. Dans une complétion, malgré ces ajouts, la relation d'ordre entre les sommets initiaux doit rester inchangée (pas d'ajout ni de retrait de relations entre ces sommets initiaux).
b- Même question pour la figure H2.

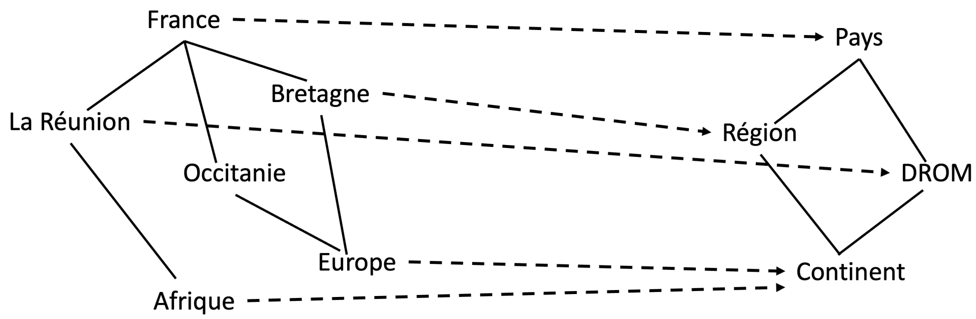

FIGURE 5 – Fonction 1

Question 4.
Soit la fonction 1 décrite par les traits pointillés entre l'ensemble d'entités géographiques (à gauche) et l'ensemble de types d'entités géographiques (à droite) sur la figure 5 :
a- Est-elle injective ?

b- Est-elle surjective ?

c- Est-ce un morphisme d'ordre ?

Seules des réponses justifiées seront considérées.

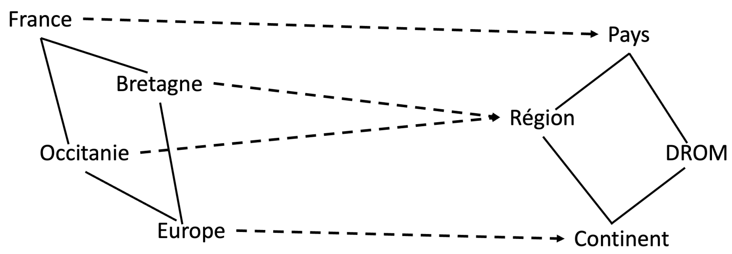

FIGURE 6 – Fonction 2

Question 5.
Soit la fonction 2 décrite par les traits pointillés entre l'ensemble d'entités géographiques (à gauche) et l'ensemble de types d'entités géographiques (à droite) sur la figure 6 :
a- Est-elle injective ?

b- Est-elle surjective ?

c- Est-ce un morphisme d'ordre ?

Seules des réponses justifiées seront considérées.

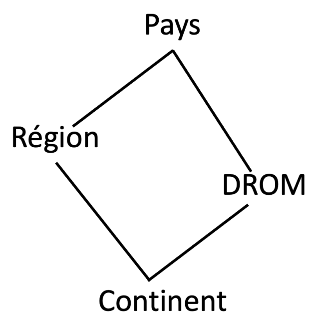

FIGURE 7 – Diagramme de Hasse H3

Question 6.
Soit l'ordre *Carre* dont le diagramme de Hasse est donné à la figure 7. Dessinez le diagramme de Hasse du produit direct $Carre \times Carre$.

2 Partie sur l'induction(1h) *À rendre sur une copie indépendante*

Exercice 1

On considère le type inductif $\mathcal{N}$ des entiers naturels vu en cours. Dans ce qui suit, on supposera que les opérations arithmétiques sur $\mathcal{N}$ sont connues et ont les propriétés usuelles (commutativité pour l'addition par exemple, etc.).

1. Écrire récursivement la fonction f qui à tout $n \in \mathcal{N}$ associe $\sum_{i=0}^{n} i$.
2. Démontrer que $f(n) = \frac{n \times S(n)}{2}$.

3 Exercice 2

Dans cet exercice, on considérera le type liste $\mathcal{L}$ vu en cours, dont les éléments sont de type $\mathcal{A}$ (type liste polymorphe). Dans le cas de cet exercice, on considérera uniquement des listes d'entiers et $\mathcal{A}$ sera égal à $\mathcal{N}$.

1. Écrire la relation inductive is_sum_list, qui étant donnée une liste d'entiers $l \in \mathcal{L}$, teste si les éléments de cette liste correspondent à des sommes des n premiers entiers (avec des n quelconques, pas forcément les mêmes). Par exemple : (is_sum_list $[6; 55]$) est valide (car 6 est la somme des 3 premiers entiers et 55 est la somme des 10 premiers entiers). On utilisera la relation is_sum vue en cours.
2. Démontrer que : (is_sum_list $[6; 55]$).
3. Écrire la fonction récursive $f_{is\_sum\_list}$, qui étant donnée une liste d'entiers $l \in \mathcal{L}$, renvoie $\top$ (de type $\mathcal{B}$) si les éléments de cette liste correspondent à des sommes des n premiers entiers (avec des n quelconques, pas forcément les mêmes) et $\perp$ (de type $\mathcal{B}$) sinon.
4. Donner le schéma d'induction fonctionnelle de la fonction $f_{is\_sum\_list}$.
5. Démontrer que la fonction $f_{is\_sum\_list}$ est correcte vis-à-vis de la relation is_sum_list. Pour cela, vous utiliserez le schéma d'induction fonctionnelle de $f_{is\_sum\_list}$ précédemment écrit.