

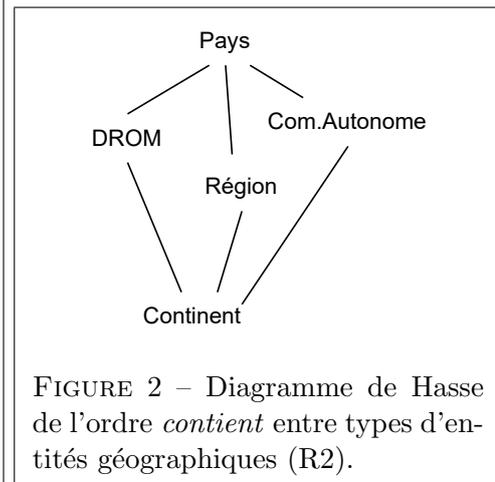
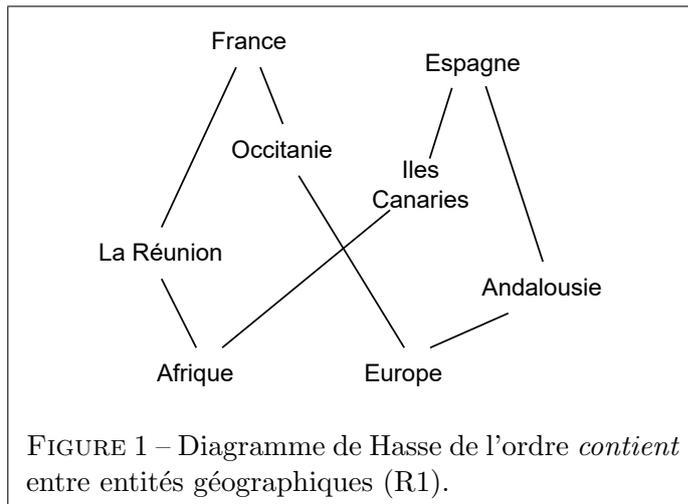
Ordres, Treillis et Induction

Tous documents sur support papier autorisés. Durée : 2h00

Les deux parties sont indépendantes. Vous devrez rendre les réponses sur 2 copies séparées.

1 Partie sur les ordres et les treillis (1h)

À rendre sur une copie indépendante



Question 1. Dessinez le graphe de la relation d'ordre dont la figure 1 est le diagramme de Hasse.

Question 2. Pour le sous-ensemble $\{France, Espagne\}$:

a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $Min(\{France, Espagne\})$.

b- L'ensemble de minorants $Min(\{France, Espagne\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant le cas échéant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?

c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera $Maj(\{France, Espagne\})$.

d- L'ensemble de majorants $Maj(\{France, Espagne\})$ admet-il un unique plus petit élément (justifiez) ?

Question 3. Pour le sous-ensemble $\{LaReunion, IlesCanaries\}$:

a- Donnez son ensemble de minorants, que l'on notera $Min(\{LaReunion, IlesCanaries\})$.

b- L'ensemble de minorants $Min(\{LaReunion, IlesCanaries\})$ admet-il un unique plus grand élément (justifiez en indiquant le cas échéant quel(s) est (sont) ce(s) plus grand(s) élément(s) ?

c- Donnez son ensemble de majorants, que l'on notera $Maj(\{LaReunion, IlesCanaries\})$.

d- L'ensemble de majorants $Maj(\{LaReunion, IlesCanaries\})$ admet-il un unique petit grand élément (justifiez) ?

Question 4.

a- Le diagramme de Hasse de la figure 1 correspond à un ordre partiel qui n'est pas un treillis. Indiquez pourquoi avec trois exemples de situations présentes dans cet ordre partiel mais interdites dans un treillis.

b- Complétez le diagramme de Hasse en ajoutant un ou plusieurs nouveaux sommets et de nouvelles relations de manière à ce qu'il devienne le diagramme de Hasse d'un treillis. La relation d'ordre entre les sommets initiaux doit rester inchangée.

Question 5.

a- Définir un morphisme d'ordre dont le domaine (source) soit l'ordre R_1 correspondant au diagramme de Hasse de la figure 1 et le co-domaine (cible) soit l'ordre R_2 correspondant au diagramme de Hasse de la figure 2. Indiquez ensuite comment ce morphisme projette chaque arc du diagramme de Hasse de R_1 vers un arc du diagramme de Hasse de R_2 .

b- Ce morphisme est-il injectif? Justifiez.

c- Ce morphisme est-il surjectif? Justifiez.

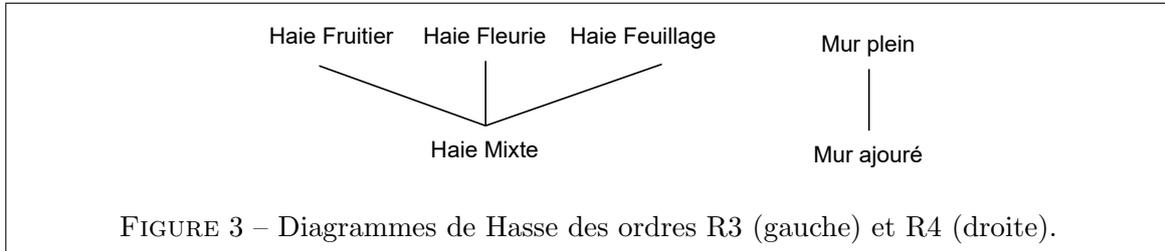


FIGURE 3 – Diagrammes de Hasse des ordres R_3 (gauche) et R_4 (droite).

Question 6.

Soient les deux ordres R_3 et R_4 dont les diagrammes de Hasse sont donnés à la figure 3. Dessinez le diagramme de Hasse du produit direct $R_3 \times R_4$ de ces deux ordres.

2 Partie sur l'induction(1h)

À rendre sur une copie indépendante