

Mathématiques pour économistes

L1 économie

Mickael Beaud

Maître de conférences des universités (MCU)
Faculté d'économie de l'université de Montpellier (UM)
Centre d'Économie de l'Environnement de Montpellier (CEE-M)
(Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr)

March 24, 2023

Thème 4: Statique comparative

- 4.1 Introduction à la statique comparative
- 4.2 Analyse de statique comparative générale
- 4.3 Théorème de l'enveloppe

- Dans les modèles économiques, il existe deux types de variables, les variables **endogènes** et les variables **exogènes**.
- Les variables **endogènes** sont calculées à l'intérieur du modèle, qui est conçu dans le but d'expliquer leur valeur.
- Les variables **exogènes** prennent une valeur qui est déterminé à l'extérieur du modèle.

- Les solutions d'un modèle économique (i.e. à l'**équilibre du modèle**) sont les valeurs des variables **endogènes** qui dépendent typiquement des valeurs des variables **exogènes**.
- Une part importante de l'analyse économique consiste à déterminer l'impact d'un changement des variables **exogènes** sur l'**équilibre du modèle**, c'est à dire sur les valeurs d'équilibre des variables **endogènes**.

- L'exercice consistant à comparer l'**équilibre** d'un modèle économique avant et après une modification des variables **exogènes** constitue ce que l'on appelle la **statique comparative**.
- Le **Thème 4** débute avec quatre modèles économiques simples qui illustrent l'exercice de **statique comparative**.

4.1 **Introduction à la statique comparative**

4.2 Analyse de statique comparative générale

4.3 Théorème de l'enveloppe

Introduction à la statique comparative

Le modèle macroéconomique Keynésien simple de détermination du revenu

- On note Y la **valeur monétaire** de l'**offre agrégée de biens et services** dans l'économie, i.e. le **revenu national**.
- On parle de **revenu national** dans la mesure où Y représente le revenu tiré de la vente des biens et services produits par les entreprises, et que ce revenu est redistribué aux ménages (travailleurs et capitalistes).

Introduction à la statique comparative

Le modèle macroéconomique Keynésien simple de détermination du revenu

- Dans le **modèle macroéconomique Keynésien** simple (on ignore la dépense publique et le commerce extérieur), la **demande agrégée de biens et services** dépend de deux éléments:
 - La **consommation agrégée de biens et services** des ménages, notée C .
 - La **demande de biens d'investissement** des entreprises, notée I .

Introduction à la statique comparative

Le modèle macroéconomique Keynésien simple de détermination du revenu

- L'investissement I est supposé **exogène**, tandis que la consommation C est supposée **endogène**, déterminée par la **fonction de consommation**:

$$C = cY, \quad 0 < c < 1$$

où c est un paramètre représentant la **propension marginale à consommer**.

- La **condition d'équilibre** du modèle (Revenu = dépense) s'écrit

$$Y = C + I$$

- En substituant la **fonction de consommation** dans la **condition d'équilibre**, on obtient

$$Y^* = \frac{I}{1 - c}$$

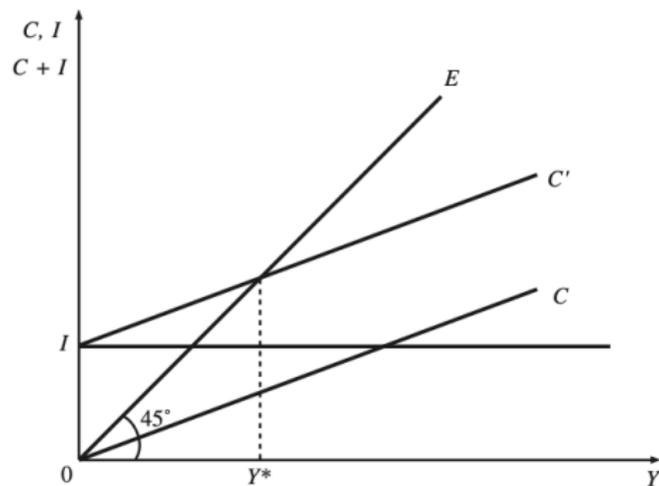
Introduction à la statique comparative

Le modèle macroéconomique Keynésien simple de détermination du revenu

- L'**équilibre** du modèle est illustré **Figure 1**.
- On a représenté la **fonction de consommation** $C = cY$ par la droite $(0C')$ et l'**investissement exogène** I par la droite horizontale passant par I .
- La **demande agrégée** $C + I = cY + I$ est représentée par la droite (IC') .
- Le **revenu d'équilibre** Y^* correspond au point d'intersection entre la droite à 45° notée $(0E)$ et la droite (IC') .
- En effet, en ce point d'intersection, on a $Y = C + I$, **le revenu égalise la dépense**.

Introduction à la statique comparative

Figure 1



Introduction à la statique comparative

Le modèle macroéconomique Keynésien simple de détermination du revenu

- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment le revenu national évolue lorsque l'investissement varie?**
- Pour ce faire, on dispose de la **fonction implicite**

$$f(Y^*, I) = Y^* [1 - c] - I = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$Y^* = \frac{I}{1 - c}$$

Introduction à la statique comparative

Le modèle macroéconomique Keynésien simple de détermination du revenu

- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

$$\frac{dY^*}{dl} = -\frac{f_l}{f_{Y^*}} = \frac{1}{1-c} > 1$$

- Si l'investissement augmente d'un montant $dl > 0$, alors le **revenu national** augmente d'un montant $\frac{1}{1-c} dl$.
- Le terme $\frac{1}{1-c}$ est le **multiplicateur Keynésien**: le **revenu national** n'augmente pas simplement de dl , mais d'un montant **supérieur** à dl ($\frac{1}{1-c} dl > dl$ car $0 < c < 1$).
- On observe également que cet **effet multiplicateur** est d'autant plus fort que la **propension marginale à consommer** est forte.

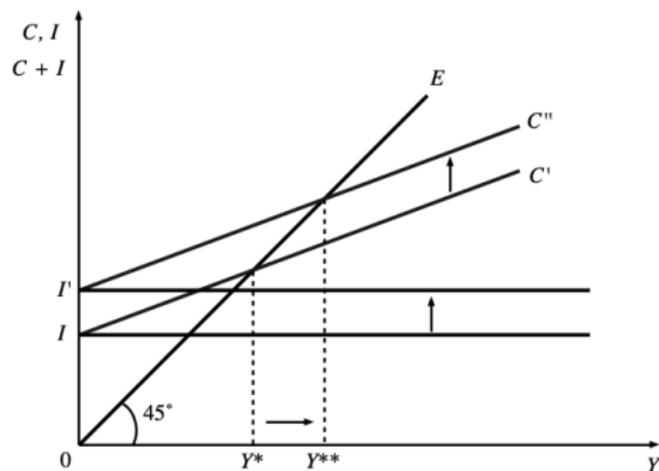
Introduction à la statique comparative

Le modèle macroéconomique Keynésien simple de détermination du revenu

- L'exercice de **statique comparative** est illustré **Figure 2**.
- L'**investissement** passe de I à I' . La droite (IC') se déplace parallèlement à elle-même vers le haut et devient ($I'C''$).
- Le **nouveau point d'équilibre** Y^{**} , où le **revenu égalise la dépense**, est obtenu à l'intersection entre la droite ($0E$) et la droite ($I'C''$).

Introduction à la statique comparative

Figure 2



Introduction à la statique comparative

Modèle linéaire de marché

- La quantité demandée d'un bien est donnée par la **fonction de demande linéaire**

$$D(p) = a - bp + cy, \quad a, b, c > 0$$

où p est le **prix unitaire** du bien et y est le **revenu agrégé** des consommateurs.

- La quantité offerte du bien est donné par la **fonction d'offre linéaire**

$$S(p) = \alpha + \beta p, \quad \alpha, \beta > 0; \alpha < a + cy$$

Introduction à la statique comparative

Modèle linéaire de marché

- L'**équilibre** sur le marché du bien est réalisé lorsque l'**offre égalise la demande**:

$$S(p^*) = D(p^*) \Leftrightarrow \alpha + \beta p^* = a - bp^* + cy$$

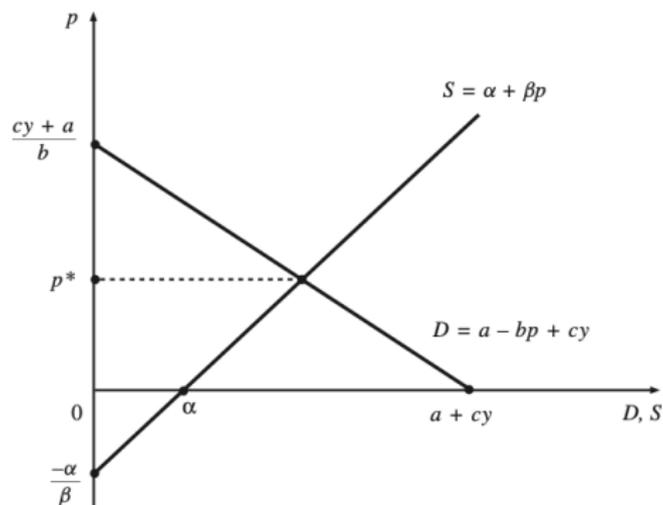
- Le **prix d'équilibre** est donc

$$p^* = \frac{a - \alpha + cy}{b + \beta}$$

- La solution est illustrée **Figure 3**.

Introduction à la statique comparative

Figure 3



Introduction à la statique comparative

Modèle linéaire de marché

- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment le prix d'équilibre du marché est affecté lorsque le revenu des consommateurs varie?**
- On dispose de la **fonction implicite**

$$f(p^*, y) = a - \alpha - [b + \beta] p^* + cy = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$p^* = \frac{a - \alpha}{b + \beta} + \frac{c}{b + \beta} y$$

- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{f_y}{f_{p^*}} = \frac{c}{b + \beta} > 0$$

Introduction à la statique comparative

Modèle linéaire de marché

- Une **hausse du revenu** des consommateurs dy conduit à une **hausse du prix d'équilibre** du marché d'un montant $\frac{c}{b+\beta} dy$.
- La **hausse du prix d'équilibre** est
 - d'autant plus **forte** que c (l'impact marginal du revenu sur la demande) est **fort**.
 - d'autant plus **faible** que b et β (pentes en valeur absolue de D et S en fonction du prix) sont **fortes**.

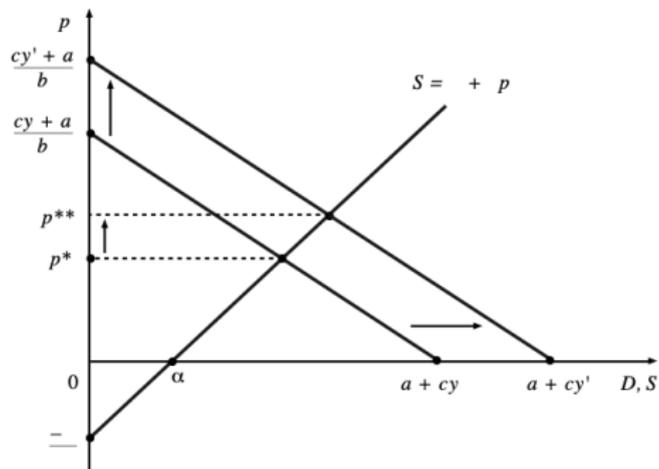
Introduction à la statique comparative

Modèle linéaire de marché

- L'exercice de **statique comparative** est illustré **Figure 4**.
- La hausse du revenu des consommateurs, qui passe de y à y' , déplace la demande parallèlement à elle-même vers le haut ou la droite.
- On observe ainsi que le nouvel équilibre du marché (après la hausse du revenu des consommateurs) est atteint avec un prix p^{**} plus élevé qu'initialement ($p^{**} > p^*$).

Introduction à la statique comparative

Figure 4



Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- Une entreprise en situation de **monopole** sur le marché d'un bien fait face à la **fonction de demande** (inverse) **linéaire**

$$p(q) = a - bq, \quad a, b > 0$$

- Sa **fonction de coût total** est

$$C(q) = cq^2, \quad c > 0$$

Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- Supposons que l'Etat décide d'imposer une **taxe à l'unité** $t > 0$ sur la vente du bien.
- La **fonction de profit du monopole** est

$$\pi(q, t) = [p(q) - t]q - C(q) = [a - t]q - [b + c]q^2$$

- Pour une **solution intérieure** (i.e. $q^* > 0$), la **condition du premier ordre** nécessaire à la **maximisation du profit** est

$$\pi_q(q^*, t) = a - t - 2[b + c]q^* = 0$$

- La **solution** est donc

$$q^* = \frac{a - t}{2[b + c]}$$

Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- La **maximisation du profit du monopole** est illustrée **Figure 5**.
- Noter que la **solution en coin** $q^* = 0$ est écartée si et seulement si $t < a$.
- En effet, nous avons vu **Section 2.3** que si q^* est une **solution en coin à gauche**, alors on doit avoir $\pi_q(0, t) \leq 0$, soit $t \geq a$.
- On peut aussi l'observer dans l'équation de la solution $q^* = \frac{a-t}{2[b+c]}$, où $q^* > 0$ si et seulement si $t < a$.

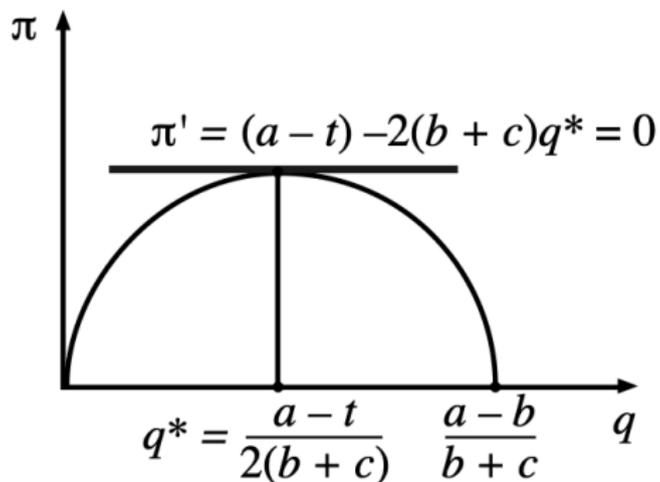
Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- De plus, il s'agit d'un **unique maximum global** car la **fonction de profit** est **strictement concave** ($\pi_{qq}(q, t) = -2[b + c] < 0$).
- En effet, la **fonction de demande linéaire** et la **fonction de coût total strictement convexe** ($C''(q) = 2c > 0$) conduisent à une **fonction de profit strictement concave**.

Introduction à la statique comparative

Figure 5



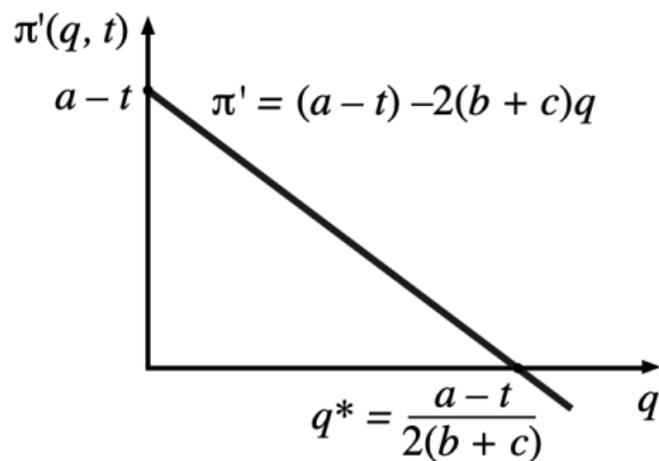
Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- La **Figure 6** illustre la **fonction de profit marginal** $\pi_q(q, t)$.
- Elle est **linéaire** et **strictement décroissante** (la **fonction de profit** est **strictement concave**).
- Elle coupe l'axe des abscisse au point solution q^* où la **condition du premier ordre** est vérifiée $\pi_q(q^*, t) = 0$.

Introduction à la statique comparative

Figure 6



Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment la quantité offerte par le monopole est affectée lorsque la taxe varie?**
- On dispose de la **fonction implicite**

$$f(q^*, t) = a - t - 2[b + c]q^* = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$q^* = \frac{a - t}{2[b + c]}$$

- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

$$\frac{dq^*}{dt} = -\frac{f_t}{f_q} = -\frac{1}{2[b + c]} < 0$$

Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- Une **hausse de la taxe** $dt > 0$ induit une **baisse de la production** d'un montant $\frac{1}{2[b+c]} dt$.
- Cette **baisse** est d'autant plus **faible** que b et c sont **forts** (i.e. si les courbes de demande et de coût marginal sont très pentues).

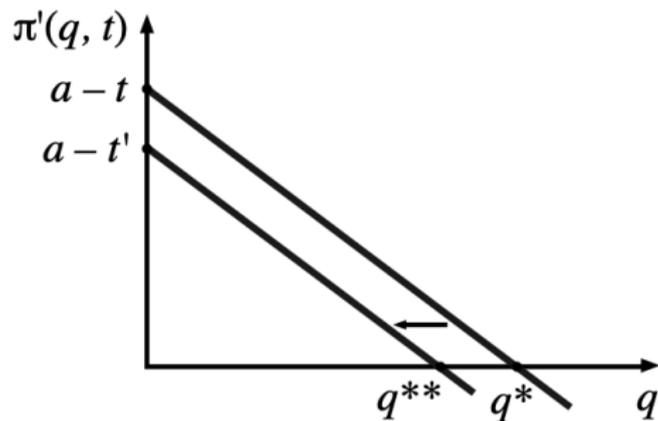
Introduction à la statique comparative

Taxe sur le produit d'un monopole

- Le résultat de **statique comparative** est illustré **Figure 7**, en terme de la **fonction de profit marginal**.
- La taxe augmente de t à t' , la **fonction de profit marginal** se déplace parallèlement à elle-même vers le bas.
- Comme sur la **Figure 6**, elle coupe l'axe des abscisse au nouveau point solution $q^{**} < q^*$, où la **condition du premier ordre** est vérifiée $\pi_q(q^{**}, t') = 0$.

Introduction à la statique comparative

Figure 7



Introduction à la statique comparative

Croissance optimale

- On suppose qu'un planificateur peut contrôler, au niveau **macroéconomique**, l'allocation des ressources (i.e. le **revenu national**) entre **consommation** et **investissement**.
- Pour simplifier, on considère une économie à **deux périodes** d'existence.
- Le planificateur cherche à **maximiser la fonction d'utilité** (représentant le **bien-être de l'ensemble des consommateurs** sur les deux périodes)

$$u(C_1, C_2) = \ln C_1 + \beta \ln C_2, \quad 0 < \beta < 1$$

où C_t représente la **consommation agrégée** à la date $t = 1, 2$, et β représente le **facteur d'actualisation**.

- Il existe un niveau de **revenu national** donné (i.e. **exogène**), noté Y_1^0 , en période 1, qui est alloué entre **consommation** et **investissement**:

$$Y_1^0 = C_1 + I$$

- L'**investissement** réalisé en première période génère un niveau de **revenu national** en seconde période (qui est entièrement consommé car il n'y a pas de période 3) donné par

$$C_2 = I^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

qui est une fonction **croissante** et **strictement concave** de l'**investissement** de première période.

- En substituant $C_1 = Y_1^0 - I$ et $C_2 = I^\alpha$ dans la **fonction objectif** du planificateur, le problème se résume au choix de I (l'**investissement** de première période):

$$\begin{aligned}v(I) &= u(Y_1^0 - I, I^\alpha) = \ln(Y_1^0 - I) + \beta \ln(I^\alpha) \\ &= \ln(Y_1^0 - I) + \alpha\beta \ln(I)\end{aligned}$$

- La **condition nécessaire du premier ordre** est

$$v'(I^*) = \frac{-1}{Y_1^0 - I^*} + \frac{\alpha\beta}{I^*} = 0$$

- Ce qui implique

$$I^* = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} Y_1^0$$

Introduction à la statique comparative

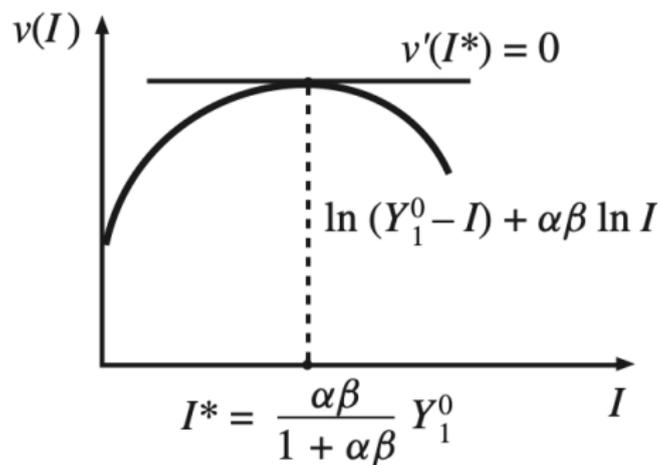
Croissance optimale

- La solution est donc d'allouer le **revenu national** (disponible en première période) en proportion $\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$ pour l'**investissement** et en proportion $1 - \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} = \frac{1}{1+\alpha\beta}$ pour la **consommation** de première période.
- Le choix de l'**allocation optimale** du **revenu national** en première période entre **consommation** et **investissement** est illustré **Figure 8** et **Figure 9**.

- Sur la **Figure 8**, on observe que la **fonction d'utilité du planificateur** est **strictement concave**.
 - La solution donnée par les **conditions du premier ordre** est donc un **unique maximum global**.
- Sur la **Figure 9**, on observe que la **fonction d'utilité marginale** $v'(I)$ est **strictement décroissante**.
 - L'**optimum** est atteint lorsqu'elle rencontre l'axe des abscisses où la **condition du premier ordre** est vérifiée, i.e. $v'(I^*) = 0$.

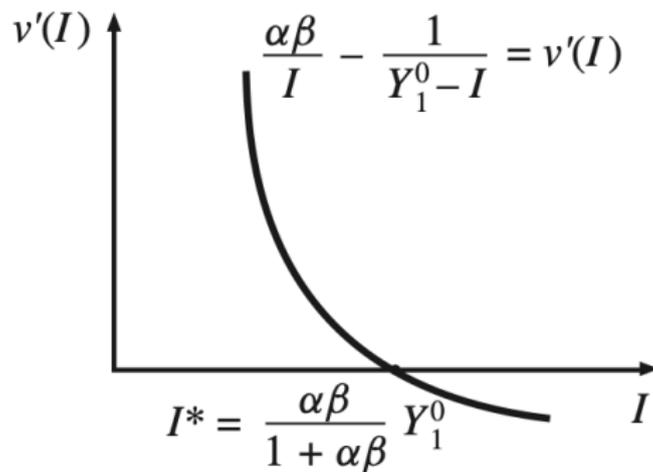
Introduction à la statique comparative

Figure 8



Introduction à la statique comparative

Figure 9



- La question de **statique comparative** dans ce modèle est de déterminer **comment l'allocation optimale entre consommation et investissement est affectée lorsque le revenu national disponible en première période varie?**
- On dispose de la **fonction implicite**

$$f(I^*, Y_1^0) = \alpha\beta Y_1^0 - [1 + \alpha\beta] I^* = 0$$

- On dispose également de la **fonction explicite**

$$I^* = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} Y_1^0$$

- Dans les deux cas, en utilisant la **différentielle**, on obtient

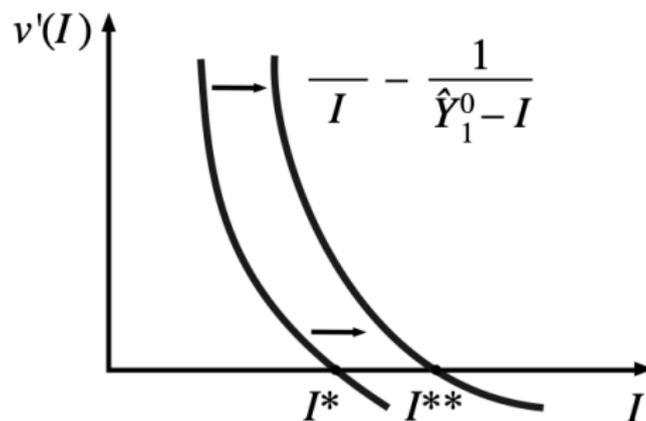
$$\frac{dI^*}{dY_1^0} = -\frac{f_{Y_1^0}}{f_{I^*}} = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} > 0$$

- Une **hausse du revenu national disponible en première période** $dY_1^0 > 0$ induit une **hausse de l'investissement** d'un montant $\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}dY_1^0$ (et une hausse de la consommation de première période $dC_1^* = dY_1^0 - dl^* = \frac{1}{1+\alpha\beta}dY_1^0$).
 - Cette **hausse** est d'autant plus forte que α et β sont **forts** (i.e. si l'investissement est très productif et le facteur d'actualisation élevé) car $\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$ est croissant avec α et β .

- Le résultat de **statique comparative** est illustré **Figure 10**, en terme de la **fonction d'utilité marginale**.
- Le **revenu national disponible en première période** augmente de Y_1^0 à \widehat{Y}_1^0 , la **fonction d'utilité marginale** se déplace parallèlement à elle-même vers le haut ou la droite.
- Comme sur la **Figure 9**, elle coupe l'axe des abscisse au nouveau point solution $I^{**} > I^*$, où la **condition du premier ordre** est vérifiée $v' \left(I^{**}, \widehat{Y}_1^0 \right) = 0$.

Introduction à la statique comparative

Figure 10



- Au regard de ces quatre exemples, la **statique comparative** consiste, à partir d'une équation fondamentale caractérisant l'**équilibre du modèle**, reliant les variables **endogènes**, les variables **exogènes** et les **paramètres** du modèle sous la forme d'une **fonction implicite**, à exprimer les variables **endogènes** en fonction des variables **exogènes** et des **paramètres** du modèle, sous la forme d'une **fonction explicite**.
- Puis en différenciant cette fonction par rapport aux variables **exogènes**, on détermine l'**impact d'un changement** des variables **exogènes** sur les valeurs des variables **endogènes** à l'équilibre.

- La **statique comparative** constitue une méthode fondamentale en **analyse économique**.
- Bien que l'on puisse menée l'analyse graphiquement, il est utile de procéder de manière **analytique** car cela permet de déterminer précisément **comment les paramètres du modèle impactent la taille des effets identifiés** (comme nous l'avons fait dans les exemples présentés).

- Il existe au moins deux directions dans lesquelles l'approche adoptée au travers des exemples précédent doit être généralisée.
- La première est de relâcher les hypothèses (fortes) concernant les **formes fonctionnelles** particulières des fonctions utilisées dans le modèle économique (e.g. demande, offre, coût, utilité).
- Nous allons voir comment étendre la méthode lorsque les relations entre les variables économiques s'expriment sous la forme d'équations, sans préciser leurs **formes fonctionnelles** particulières, mais en faisant seulement des hypothèses sur leur **forme générale** (e.g. croissance, décroissance, concavité, convexité).

- La seconde direction est d'étendre l'analyse aux modèles économiques comprenant **plusieurs variables endogènes** et **plusieurs variables exogènes** (alors que dans les exemples étudiés, il y avait seulement une variable de chaque type).

Thème 4: Statique comparative

4.1 Introduction à la statique comparative

4.2 **Analyse de statique comparative générale**

4.3 Théorème de l'enveloppe

- Etendons progressivement l'analyse de **statique comparative** développée **Section 4.1**.
- Supposons, comme précédemment, qu'il existe **une variable endogène** et **une variable exogène**, mais sans faire l'hypothèse (restrictive) de **formes fonctionnelles** particulières pour les fonctions considérées.

- On note x la variable **endogène** et on note α la variable **exogène**.
- On suppose que l'on étudie un modèle économique permettant de déterminer la valeur de x en fonction de α (e.g. le prix d'équilibre du marché en fonction du revenu des consommateurs).

- Formellement, la résolution du modèle économique consiste à trouver la **solution d'une équation d'équilibre** de la forme

$$f(x^*, \alpha) = 0$$

où x^* est la valeur de la variable **endogène** à l'équilibre.

- L'interprétation de cette équation dépend du modèle économique particulier que l'on étudie (e.g. offre=demande, condition du premier ordre nécessaire à la maximisation du profit, etc.).

- La **solution de l'équation d'équilibre** est de la forme x^* fonction de α (e.g. le prix d'équilibre du marché en fonction du revenu des consommateurs).
- Si la fonction f est différentiable, alors on peut déterminer l'impact d'une variation de α sur x^* en calculant $\frac{dx^*}{d\alpha}$.
- Le but de cette analyse de **statique comparative** est d'obtenir le plus d'information possible sur le terme $\frac{dx^*}{d\alpha}$, notamment de déterminer son **signe** et les éléments qui influence sa **magnitude** (e.g. l'impact d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché).

- La **différentielle totale** de l'**équation d'équilibre** donne

$$df(x^*, \alpha) = \frac{\partial f(x^*, \alpha)}{\partial x} dx^* + \frac{\partial f(x^*, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

soit

$$\frac{dx^*}{d\alpha} = - \frac{f_\alpha(x^*, \alpha)}{f_x(x^*, \alpha)}$$

- Remarquer que ceci est simplement l'application du **théorème des fonctions implicites (Théorème 11, Section 1.3)**. Cette approche nécessite donc d'avoir $f_x \neq 0$.
- De plus, noter que les **dérivées partielles** sont évaluées au point solution (x^*, α) . Ce sont donc des **nombre**s.

Exemple (1)

Soit la fonction implicite

$$f(x^*, \alpha) = \ln x^* - 2\alpha^2 = 0$$

Déterminer le la valeur de $\frac{dx^*}{d\alpha}$.

- En différenciant comme ci-dessus, ou en appliquant directement le **théorème des fonctions implicites (Théorème 11, Section 1.3)**, on obtient

$$\frac{dx^*}{d\alpha} = -\frac{f_{\alpha}(x^*, \alpha)}{f_x(x^*, \alpha)} = -\frac{-4\alpha}{\frac{1}{x^*}} = 4\alpha x^*$$

Analyse de statique comparative générale

Effet d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché

- On note $D(p, y)$ la **fonction de demande** du marché en fonction du prix du bien p et du revenu agrégé des consommateurs y (comme dans le premier exemple de la **Section 4.1**, mais sans préciser sa forme fonctionnelle particulière).
- On note $S(p)$ la **fonction d'offre** du marché (encore une fois, sans préciser sa forme fonctionnelle particulière).

Analyse de statique comparative générale

Effet d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché

- Ici, p correspond à la variable **endogène** (x ci-dessus) et y correspond à la variable **exogène** (α ci-dessus).
- La valeur du **prix d'équilibre** p^* est donnée par l'égalisation de l'offre et de la demande (i.e. l'**équation d'équilibre**), soit

$$f(p^*, y) = D(p^*, y) - S(p^*) = 0$$

- Dans ce modèle, la **fonction implicite** f représente donc la **demande excédentaire** (qui doit être nulle à l'équilibre du marché).

Analyse de statique comparative générale

Effet d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché

- On obtient donc

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{f_y(p^*, y)}{f_p(p^*, y)} = -\frac{D_y(p^*, y)}{D_p(p^*, y) - S_p(p^*)}$$

ou plus simplement (en gardant à l'esprit que les **dérivées partielles** sont évaluées au point solution):

$$\frac{dp^*}{dy} = -\frac{D_y}{D_p - S_p}$$

Analyse de statique comparative générale

Effet d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché

- Supposons que $D_p < 0$ (le bien n'est pas un **bien Giffen**) et $S_p > 0$. Alors, $\frac{dp^*}{dy}$ est du signe de D_y .
 - Si $D_y > 0$ (**bien normal**) alors $\frac{dp^*}{dy} > 0$.
 - Si $D_y < 0$ (**bien inférieur**) alors $\frac{dp^*}{dy} < 0$.
- Supposons que $D_p > 0$ (**bien Giffen**). Le bien est donc nécessairement un **bien inférieur** avec $D_y < 0$. Alors, $\frac{dp^*}{dy}$ est du signe de $D_p - S_p$.
 - Si $D_p - S_p > 0$ alors $\frac{dp^*}{dy} > 0$.
 - Si $D_p - S_p < 0$ alors $\frac{dp^*}{dy} < 0$.

Analyse de statique comparative générale

Effet d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché

- En général, l'analyse de **statique comparative** nous apprend que tout est possible (c'est plutôt la règle que l'exception) étant donné le peu d'hypothèses de base concernant la forme des fonctions (puisque nous n'avons pas précisé leur **forme fonctionnelle** particulière).
- Elle nous donne **tous les cas logiquement possibles**, et exclut donc ceux qui ne le sont pas.
- Mais cela ne signifie pas que l'analyse de **statique comparative** est inutile, au contraire.
- Elle permet de déterminer précisément quelles hypothèses concernant la forme des fonctions conduisent à un effet particulier ($\frac{dp^*}{dy} > 0$ ou $\frac{dp^*}{dy} < 0$ dans l'exemple ci-dessus).

Analyse de statique comparative générale

Effet d'une variation du revenu des consommateurs sur le prix d'équilibre du marché

- Deux interprétations de la méthode sont possibles.
- D'un côté, l'analyse de **statique comparative** peut permettre d'**expliquer un phénomène observé** (e.g. $\frac{dp^*}{dy} > 0$ ou $\frac{dp^*}{dy} < 0$ par exemple) par les hypothèses faites sur la forme des fonctions à l'oeuvre (e.g. signes de D_p , D_y et S_p).
- D'un autre côté, elle peut permettre de **faire des prédictions testables** (e.g. $\frac{dp^*}{dy} > 0$ ou $\frac{dp^*}{dy} < 0$) à partir des hypothèses empiriquement fondées sur la forme des fonctions à l'oeuvre (e.g. signes de D_p , D_y et S_p).

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Nous venons d'étendre l'analyse de **statique comparative** aux cas où on ne précise pas la **forme fonctionnelle** particulière des fonctions du modèle économique étudié, en nous contentant de faire des hypothèses générales concernant le signe des dérivées partielles de ces fonctions.
- Nous allons maintenant généraliser un peu plus l'approche de **statique comparative** en étudiant les cas où il existe **plusieurs variables endogènes** et **plusieurs variables exogènes**.

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Considérons un modèle économique avec **deux variables endogènes**, notées x_1 et x_2 , et **deux variables exogènes**, notées α_1 et α_2 .
- Dans ce contexte, les **équations d'équilibre** (e.g. **conditions du premier ordre** nécessaires à la maximisation du profit) sont

$$f^1(x_1^*, x_2^*, \alpha_1, \alpha_2) = 0$$

$$f^2(x_1^*, x_2^*, \alpha_1, \alpha_2) = 0$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Les solutions sont de la forme x_1^* fonction de α_1 et de α_2 , et x_2^* fonction de α_1 et de α_2 .
- L'objectif de l'analyse de **statique comparative** est alors de déterminer, si possible, les **signes** des quatre dérivées partielles $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j}$, $i, j = 1, 2$.

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- En dérivant les **équations d'équilibre** rapport à α_1 , on obtient

$$\frac{\partial f^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^1}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f^2}{\partial \alpha_1} = 0$$

ou, plus simplement,

$$f_1^1 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^1 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} = -f_{\alpha_1}^1$$

$$f_1^2 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} + f_2^2 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} = -f_{\alpha_1}^2$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Comme les **dérivées partielles** de f^1 et de f^2 de sont toutes évaluées au point solution, se sont des **nombres**. Les deux équations ci-dessus forment ainsi un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial \alpha_1 \\ \partial x_2^* / \partial \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_1}^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{vmatrix} = f_1^1 f_2^2 - f_1^2 f_2^1 \neq 0$$

- Supposons que ce soit le cas.

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_1} = \frac{\begin{vmatrix} -f_{\alpha_1}^1 & f_2^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 & f_2^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-[f_{\alpha_1}^1 f_2^2 - f_{\alpha_1}^2 f_2^1]}{D}$$

et

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_1} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & -f_{\alpha_1}^1 \\ f_1^2 & -f_{\alpha_1}^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-[f_1^1 f_{\alpha_1}^2 - f_1^2 f_{\alpha_1}^1]}{D}$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Pour trouver le signe de ces deux dérivées, nous devons connaître le signe de toutes les dérivées partielles de f^1 et de f^2 .
- De plus, comme les numérateurs et les dénominateurs ci-dessus contiennent des différences entre deux termes, nous devons connaître, ou faire des hypothèses, concernant la taille de ces termes.

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Une analyse symétrique permet d'identifier les deux autres dérivées partielles par rapport à α_2 :

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_2} = \frac{\begin{vmatrix} -f_{\alpha_2}^1 & f_2^1 \\ -f_{\alpha_2}^2 & f_2^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-[f_{\alpha_2}^1 f_2^2 - f_{\alpha_2}^2 f_2^1]}{D}$$

et

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_2} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & -f_{\alpha_2}^1 \\ f_1^2 & -f_{\alpha_2}^2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-[f_1^1 f_{\alpha_2}^2 - f_1^2 f_{\alpha_2}^1]}{D}$$

Analyse de statique comparative générale

Le modèle IS-LM

- Considérons un modèle **IS-LM** dans lequel la **dépense agrégée** E est une fonction du **revenu agrégé** Y et du **taux d'intérêt** R .
- De plus, on suppose que E incorpore un élément **exogène** \bar{E} :

$$E = \bar{E} + E(Y, R), \quad 0 < E_Y < 1, E_R < 0$$

où les signes des dérivées partielles indiquent que E augmente lorsque Y augmente ($E_Y > 0$), et diminue lorsque R augmente ($E_R < 0$).

Analyse de statique comparative générale

Le modèle IS-LM

- L'**équilibre** sur le marché des biens et services est atteint lorsque l'offre égalise la demande:

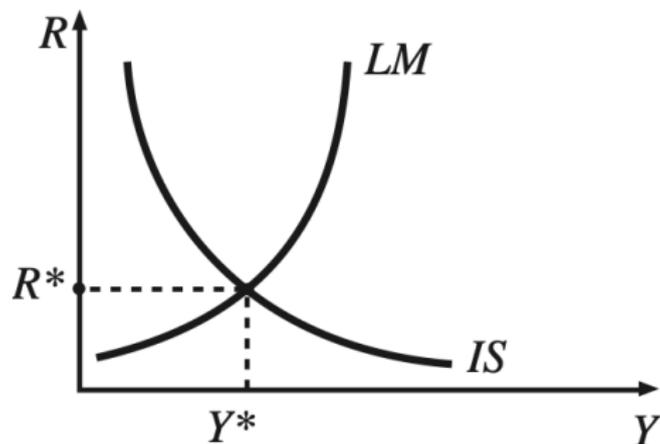
$$Y = \bar{E} + E(Y, R)$$

- Dans ce modèle, il existe **deux variables endogènes**, Y et R , et **une variable exogène** \bar{E} .
- Comme nous ne disposons que d'**une équation d'équilibre**, on ne peut pas résoudre le modèle (i.e. exprimer Y et R en fonction de \bar{E}).

- La **condition d'équilibre** sur le marché des biens et services elle-même ne permet pas de calculer une valeur unique du revenu Y et du taux d'intérêt R .
- Toutefois, pour une valeur donnée de R , on peut calculer la valeur de Y qui égalise l'offre et la demande agrégées de biens et services.
- De même, pour une valeur donnée de Y , on peut calculer la valeur de R qui égalise l'offre et la demande agrégées de biens et services.
- Ceci est illustré par la **courbe IS** représentée **Figure 11**.

Analyse de statique comparative générale

Figure 11



- La **courbe IS** est **décroissante**. En effet, étant donné la **dépense exogène** \bar{E} , l'**équation d'équilibre** donne une **relation implicite** entre Y et R :

$$f^{IS}(Y, R) = Y - \bar{E} - E(Y, R) = 0$$

- D'après le **théorème des fonctions implicites**, on a

$$\frac{dR}{dY} = -\frac{f_Y^{IS}}{f_R^{IS}} = \frac{1 - E_Y}{E_R} < 0$$

- La **décroissance** de la **courbe IS** découle directement des hypothèses faites sur les dérivées partielles, $0 < E_Y < 1$ et $E_R < 0$.

Analyse de statique comparative générale

Le modèle IS-LM

- De plus, une hausse de la **dépense exogène** \bar{E} déplace la **courbe IS** vers le haut.
- En effet, *ceteris paribus*, i.e. avec Y fixé, la relation entre les variations de \bar{E} et R est donnée par

$$\frac{dR}{d\bar{E}} = -\frac{f_{\bar{E}}^{IS}}{f_R^{IS}} = -\frac{1}{E_R} > 0$$

- La **courbe LM** représente l'**équilibre** sur le **marché de la monnaie**.
- La **demande de monnaie** L est **croissante** avec Y , et **décroissante** avec R :

$$L = L(Y, R), \quad L_Y > 0, \quad L_R < 0$$

- L'**offre de monnaie** \bar{M} est supposée **exogène**.

- A l'**équilibre** sur le marché de la monnaie, la **demande de monnaie égalise l'offre de monnaie** :

$$f^{LM}(Y, R) = L(Y, R) - \bar{M} = 0$$

- Cette **seconde équation d'équilibre** donne une **seconde relation implicite** entre Y et R .

Analyse de statique comparative générale

Le modèle IS-LM

- Comme précédemment, pour une valeur donnée de R , on peut calculer la valeur de Y qui égalise l'offre et la demande sur le marché de la monnaie.
- De même, pour une valeur donnée de Y , on peut calculer la valeur de R qui égalise l'offre et la demande sur le marché de la monnaie.
- Cette relation est représentée par la **courbe LM** sur la **Figure 11**.

- D'après le **théorème des fonctions implicites**, on a

$$\frac{dR}{dY} = -\frac{f_Y^{LM}}{f_R^{LM}} = -\frac{L_Y}{L_R} > 0$$

- La **croissance** de la **courbe LM** découle directement des hypothèses faites sur les dérivées partielles, $L_Y > 0$ et $L_R < 0$.

- De plus, une hausse de l'**offre de monnaie exogène** \bar{M} déplace la **courbe LM** vers le bas. En effet, *ceteris paribus*, i.e. avec Y fixé, la relation entre \bar{M} et R est

$$\frac{dR}{d\bar{M}} = -\frac{f_M^{LM}}{f_R^{LM}} = \frac{1}{L_R} < 0$$

- Ainsi, une hausse de l'offre de monnaie \bar{M} réduit le taux d'intérêt R nécessaire à l'égalisation de l'offre et la demande de monnaie, pour chaque niveau de revenu Y .

- En combinant l'**équation d'équilibre sur le marché des biens et services (IS)** et l'**équation d'équilibre sur le marché de la monnaie (LM)**, on obtient un système de deux équations à deux inconnues (Y et R), que l'on peut résoudre:

$$\begin{aligned}f^{IS}(Y^*, R^*) &= Y^* - \bar{E} - E(Y^*, R^*) = 0 \\f^{LM}(Y^*, R^*) &= L(Y^*, R^*) - \bar{M} = 0\end{aligned}$$

- Ainsi, on obtient l'**équilibre général du modèle IS-LM**, i.e. le couple **revenu** Y^* et **taux d'intérêt** R^* .
- C'est le point d'intersection entre la **courbe IS** et la **courbe LM** sur la **Figure 11**.

Analyse de statique comparative générale

Le modèle IS-LM

- En comparaison de l'analyse décontextualisée menée plus haut, les fonctions f^{IS} et f^{LM} correspondent à f^1 et f^2 , les variables endogènes Y et R correspondent à x_1 et x_2 , et les variables exogènes \bar{E} et \bar{M} correspondent à α_1 et α_2 .
- Dans l'analyse de **statique comparative** du **modèle IS-LM**, on cherche à déterminer l'impact des variations de la dépense exogène \bar{E} et de l'offre de monnaie exogène \bar{M} sur le couple revenu Y^* et taux d'intérêt R^* d'équilibre.

- D'après l'analyse précédente, l'impact d'une variation de la **dépense exogène** \bar{E} vérifie

$$\begin{bmatrix} f_Y^{IS} & f_R^{IS} \\ f_Y^{LM} & f_R^{LM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial Y^* / \partial \bar{E} \\ \partial R^* / \partial \bar{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\bar{E}}^{IS} \\ -f_{\bar{E}}^{LM} \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 1 - E_Y & -E_R \\ L_Y & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial Y^* / \partial \bar{E} \\ \partial R^* / \partial \bar{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = \begin{vmatrix} 1 - E_Y & -E_R \\ L_Y & L_R \end{vmatrix} = [1 - E_Y] L_R + L_Y E_R \neq 0$$

- D'après les hypothèses concernant les dérivées partielles $0 < E_Y < 1$, $E_R < 0$, $L_Y > 0$ et $L_R < 0$, on a clairement $D < 0$.

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \bar{E}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -E_R \\ 0 & L_R \end{vmatrix}}{D} = \frac{L_R}{D} > 0$$

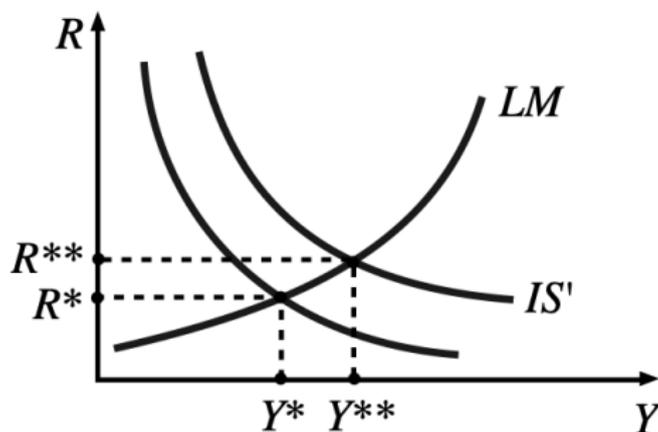
et

$$\frac{\partial R^*}{\partial \bar{E}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - E_Y & 1 \\ L_Y & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-L_Y}{D} > 0$$

- Le modèle IS-LM permet de conclure qu'une **hausse de la dépense exogène** (e.g. hausse de la demande de biens d'investissement), conduit à une **hausse du revenu** et une **hausse du taux d'intérêt**.
- La hausse de la dépense conduit à une hausse (directe) du revenu. Cette hausse du revenu augmente la demande de monnaie, et conduit à une hausse (indirecte) du taux d'intérêt à offre de monnaie fixée.
- Ceci est illustré **Figure 12**.

Analyse de statique comparative générale

Figure 12



- Même si le modèle reste assez général, seules les hypothèses concernant le signe des dérivées partielles des fonctions $E(Y, R)$ et $L(Y, R)$, et l'hypothèse $E_Y < 1$, permettent de conclure sans ambiguïté l'impact qualitatif d'une hausse de l'investissement sur l'équilibre macroéconomique.

- Une analyse de statique comparative similaire peut être menée en envisageant une variation de l'offre de monnaie \bar{M} . Encore une fois, on peut montrer qu'on obtient sans ambiguïté, à partir des hypothèses concernant le signe des dérivées partielles des fonctions $E(Y, R)$ et $L(Y, R)$, et l'hypothèse $E_Y < 1$, qu'une **hausse de l'offre de monnaie \bar{M}** conduit à une **baisse du taux d'intérêt R** et une **hausse du revenu Y** .

Analyse de statique comparative générale

Demande de facteurs de l'entreprise concurrentielle

- Une entreprise vend sa production sur un marché **concurrentiel** et fait donc face au **prix de marché** p .
- Elle emploie des travailleurs sur un marché du travail concurrentiel au taux de salaire w , et emprunte sur un marché du capital concurrentiel au taux r .
- La technologie de l'entreprise est représentée par une fonction de production **strictement concave** $f(L, K)$.

- La **fonction de profit** que l'entreprise cherche à maximiser est

$$\pi = pf(L, K) - wL - rK$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\pi_L = pf_L(L^*, K^*) - w = 0$$

$$\pi_K = pf_K(L^*, K^*) - r = 0$$

Analyse de statique comparative générale

Demande de facteurs de l'entreprise concurrentielle

- L'exercice de **statique comparative** consiste ici à déterminer l'impact d'une variation des prix des facteurs w et r (variables **exogènes**) sur les demandes optimales de facteurs L^* et K^* (variables **endogènes**).
- En dérivant les **conditions du premier ordre** par rapport à w on obtient le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{bmatrix} pf_{LL} & pf_{LK} \\ pf_{KL} & pf_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial L^* / \partial w \\ \partial K^* / \partial w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} pf_{LL} & pf_{LK} \\ pf_{KL} & pf_{KK} \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} f_{LL} & f_{LK} \\ f_{KL} & f_{KK} \end{vmatrix} \\ &= p^2 |H| = p^2 [f_{LL}f_{KK} - f_{LK}^2] \neq 0 \end{aligned}$$

- Si les **conditions du second ordre** du **Théorème 3 Section 3.2** pour un **maximum** sont vérifiées, alors la **matrice Hessienne** de f vérifie $|H| > 0$ et donc $D > 0$.

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & pf_{LK} \\ 0 & pf_{KK} \end{vmatrix}}{D} = \frac{pf_{KK}}{D} < 0$$

et

$$\frac{\partial K^*}{\partial w} = \frac{\begin{vmatrix} pf_{LL} & 1 \\ pf_{KL} & 0 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{pf_{KL}}{D}$$

Analyse de statique comparative générale

Demande de facteurs de l'entreprise concurrentielle

- Le signe négatif de $\frac{\partial L^*}{\partial w}$ découle du fait que $f_{KK} < 0$ car la **fonction de production f est strictement concave**. Une **hausse du taux de salaire réduit la demande optimale de travail**.
- Le signe de $\frac{\partial K^*}{\partial w}$ dépend du signe de f_{KL} , i.e. l'effet d'une variation de la quantité de travail sur la productivité marginale du capital. Si l'on fait l'hypothèse que $f_{KL} > 0$ (ce qui n'est pas nécessairement le cas), alors une **hausse du taux de salaire réduit la demande optimale de capital**.

Analyse de statique comparative générale

Statique comparative pour les problèmes d'optimisation contraints

- Lorsque l'on envisage le **problème d'optimisation contraint** le plus simple, avec **deux variables** et **une contrainte**, les solutions doivent vérifier trois **conditions du premier ordre**, avec **trois variables endogènes** (les deux variables de contrôle et le **multiplicateur de Lagrange**).
- Pour appliquer l'analyse de **statique comparative** aux solutions d'un **problème d'optimisation contraint**, nous devons étendre l'analyse précédente à n **variables endogènes**.
- Commençons avec $n = 3$.

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Considérons un modèle économique avec **trois variables endogènes**, notées x_1, x_2 et x_3 , et m **variables exogènes**, notées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.
- Dans ce contexte, les **équations d'équilibre** sont

$$f^1(x_1^*, x_2^*, x_3^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$$

$$f^2(x_1^*, x_2^*, x_3^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$$

$$f^3(x_1^*, x_2^*, x_3^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Les **solutions** sont de la forme (variables **endogènes** fonctions des variables **exogènes**):

$$x_i^* = x_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad i = 1, 2, 3$$

- L'objectif de l'analyse de **statique comparative** est alors de déterminer les signes des m dérivées partielles $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, m$.

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- En dérivant les **équations d'équilibre** rapport à α_j , $j = 1, \dots, m$, on obtient

$$f_1^1 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} + f_2^1 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} + f_3^1 \frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} = -f_{\alpha_j}^1$$

$$f_1^2 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} + f_2^2 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} + f_3^2 \frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} = -f_{\alpha_j}^2$$

$$f_1^3 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} + f_2^3 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} + f_3^3 \frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} = -f_{\alpha_j}^3$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Comme les dérivées partielles de f^1 , f^2 et f^3 de sont toutes évaluées au point solution, se sont des **nombre**s. Les trois équations ci-dessus forment ainsi un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial \alpha_j \\ \partial x_2^* / \partial \alpha_j \\ \partial x_3^* / \partial \alpha_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_j}^1 \\ -f_{\alpha_j}^2 \\ -f_{\alpha_j}^3 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = |F| = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Supposons que ce soit le cas.

- En utilisant la **méthode des cofacteurs**, on peut calculer D comme suit:

$$D = f_1^1 \begin{vmatrix} f_2^2 & f_3^2 \\ f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix} - f_2^1 \begin{vmatrix} f_1^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & f_3^3 \end{vmatrix} + f_3^1 \begin{vmatrix} f_1^2 & f_2^2 \\ f_1^3 & f_2^3 \end{vmatrix} \\ f_1^1 [f_2^2 f_3^3 - f_2^3 f_3^2] - f_2^1 [f_1^2 f_3^3 - f_1^3 f_3^2] + f_3^1 [f_1^2 f_2^3 - f_1^3 f_2^2]$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- D'après la **règle de Cramer**, on a

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{D} \quad i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, m$$

où F_{ij} est obtenue en remplaçant la colonne i de F , par le vecteur colonne

$$\begin{bmatrix} -f_{\alpha_j}^1 \\ -f_{\alpha_j}^2 \\ -f_{\alpha_j}^3 \end{bmatrix}$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Lorsque l'on veut résoudre un **système d'équations linéaires** à trois équations et trois inconnues, la **règle de Cramer** donne

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{1j}|}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -f_{\alpha_j}^1 & f_2^1 & f_3^1 \\ -f_{\alpha_j}^2 & f_2^2 & f_3^2 \\ -f_{\alpha_j}^3 & f_2^3 & f_3^3 \end{vmatrix}}{D} \quad j = 1, \dots, m$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{2j}|}{D} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & -f_{\alpha_j}^1 & f_3^1 \\ f_1^2 & -f_{\alpha_j}^2 & f_3^2 \\ f_1^3 & -f_{\alpha_j}^3 & f_3^3 \end{vmatrix}}{D} \quad j = 1, \dots, m$$

et

$$\frac{\partial x_3^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{3j}|}{D} = \frac{\begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 & -f_{\alpha_j}^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & -f_{\alpha_j}^2 \\ f_1^3 & f_2^3 & -f_{\alpha_j}^3 \end{vmatrix}}{D} \quad j = 1, \dots, m$$

Analyse de statique comparative générale

Plusieurs variables endogènes et plusieurs variables exogènes

- Lorsque l'on résout un **problème d'optimisation** à deux variables et une contrainte, les fonctions f^1 , f^2 et f^3 sont les trois **conditions du premier ordre**, i.e. les dérivées partielles de la **fonction de Lagrange** par rapport aux deux variables et au **multiplicateur**.
- Dans ce cas, le déterminant $D = |F|$ est le déterminant de la **matrice Hessienne** associée à la **fonction de Lagrange**. Comme les **conditions du second ordre** s'expriment en fonction du signe du déterminant de cette matrice (voir **Section 3.2, Théorème 3**), on peut utiliser le fait que les **conditions du second ordre** sont vérifiées pour trouver le signe des effets de **statique comparative** (e.g. maximum si $|F| > 0$).

- Considérons le **problème du consommateur** avec deux biens:

$$\max_{x_1, x_2} : u(x_1, x_2) \quad s.c. \quad R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

- Les variables **endogènes** sont les demandes x_1 et x_2 , et les variables **exogènes** sont les prix p_1 et p_2 et le revenu R .
- L'un des but principaux de l'analyse du problème du consommateur est de déterminer l'**impact des variations de prix sur les demandes de biens**. Il s'agit d'un exercice de **statique comparative**.

- En appliquant la **méthode de Lagrange**, les **conditions du premier ordre** sont

$$u_1(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_1 = 0$$

$$u_2(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_2 = 0$$

$$R - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0$$

- En dérivant les **conditions du premier ordre** rapport à p_1 , on obtient

$$\begin{aligned}u_{11} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + u_{12} \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} &= \lambda^* \\u_{21} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + u_{22} \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} &= 0 \\-p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} &= x_1^*\end{aligned}$$

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

- Les trois équations ci-dessus forment un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial p_1 \\ \partial x_2^* / \partial p_1 \\ \partial \lambda^* / \partial p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* \\ 0 \\ x_1^* \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si

$$D = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

- La règle de **Cramer** donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda^* & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ x_1^* & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{\lambda^* \begin{vmatrix} u_{22} & -p_2 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix} - u_{12} \begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ x_1^* & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} 0 & u_{22} \\ x_1^* & -p_2 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{-\lambda^* p_2^2}{D} + \frac{x_1^* [p_1 u_{22} - p_2 u_{12}]}{D}\end{aligned}$$

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} &= \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & \lambda^* & -p_1 \\ u_{21} & 0 & -p_2 \\ -p_1 & x_1^* & 0 \end{vmatrix}}{D_{p_1}} \\ &= \frac{u_{11} \begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ x_1^* & 0 \end{vmatrix} - \lambda^* \begin{vmatrix} u_{21} & -p_2 \\ -p_1 & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} u_{21} & 0 \\ -p_1 & x_1^* \end{vmatrix}}{D_{p_1}} \\ &= \frac{p_1 p_2 \lambda^*}{D} + \frac{x_1^* [p_2 u_{11} - p_1 u_{21}]}{D}\end{aligned}$$

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

- De même, en dérivant les **conditions du premier ordre** rapport à p_2 , on obtient

$$\begin{aligned}u_{11} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} + u_{12} \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} - p_1 \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} &= 0 \\u_{21} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} + u_{22} \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} &= \lambda^* \\-p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} &= x_2^*\end{aligned}$$

- Les trois équations ci-dessus forment un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial p_2 \\ \partial x_2^* / \partial p_2 \\ \partial \lambda^* / \partial p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si $D \neq 0$. Or nous avons vu dans la **Section 3.2, Théorème 3**, que les **conditions du second ordre** sont vérifiées si $D > 0$.

- La règle de Cramer donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -p_1 \\ \lambda^* & u_{22} & -p_2 \\ x_2^* & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{-u_{12} \begin{vmatrix} \lambda^* & -p_2 \\ x_2^* & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} \lambda^* & u_{22} \\ x_2^* & -p_2 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{\lambda^* p_1 p_2}{D} + \frac{x_2^* [p_1 u_{22} - p_2 u_{12}]}{D}\end{aligned}$$

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} &= \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & 0 & -p_1 \\ u_{21} & \lambda^* & -p_2 \\ -p_1 & x_2^* & 0 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{u_{11} \begin{vmatrix} \lambda^* & -p_2 \\ x_2^* & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} u_{21} & \lambda^* \\ -p_1 & x_2^* \end{vmatrix}}{D} \\ &= -\frac{\lambda^* p_1^2}{D} + \frac{x_2^* [p_2 u_{11} - p_1 u_{21}]}{D}\end{aligned}$$

- De même, en dérivant les **conditions du premier ordre** rapport à R , on obtient

$$\begin{aligned}u_{11} \frac{\partial x_1^*}{\partial R} + u_{12} \frac{\partial x_2^*}{\partial R} - p_1 \frac{\partial \lambda^*}{\partial R} &= 0 \\u_{21} \frac{\partial x_1^*}{\partial R} + u_{22} \frac{\partial x_2^*}{\partial R} - p_2 \frac{\partial \lambda^*}{\partial R} &= 0 \\-p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial R} - p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial R} &= -1\end{aligned}$$

- Les trois équations ci-dessus forment un **système d'équations linéaires**:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial R \\ \partial x_2^* / \partial R \\ \partial \lambda^* / \partial R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- On peut résoudre ce système en utilisant la **règle de Cramer**. On sait qu'il existe une **unique solution** si et seulement si $D \neq 0$

- La règle de Cramer donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1^*}{\partial R} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -p_1 \\ 0 & u_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{-u_{12} \begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} 0 & u_{22} \\ -1 & -p_2 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{p_2 u_{12} - p_1 u_{22}}{D}\end{aligned}$$

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2^*}{\partial R} &= \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & 0 & -p_1 \\ u_{21} & 0 & -p_2 \\ -p_1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{u_{11} \begin{vmatrix} 0 & -p_2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} u_{21} & 0 \\ -p_1 & -1 \end{vmatrix}}{D} \\ &= \frac{p_1 u_{21} - p_2 u_{11}}{D}\end{aligned}$$

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

- L'analyse de **statique comparative** permet également de déterminer l'**impact d'une hausse du revenu sur la demande**.
- Considérons le signe de

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial R} = \frac{p_2 u_{12} - p_1 u_{22}}{D}$$

- La théorie ne place aucune restriction sur le signe de u_{12} et u_{22} . Nous ne pouvons donc pas déterminer le signe du numérateur (idem pour $\frac{\partial x_2^*}{\partial R}$).

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

- Cette indétermination est plus une force qu'une faiblesse de la théorie. En effet, elle nous conduit à trois cas possibles correspondant à une classification du bien:
 - Bien **normal** $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} > 0$.
 - Bien **strictement inférieur** $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} < 0$.
 - Bien **faiblement inférieur** $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} = 0$.
- Si le bien est **inférieur** (sans préciser strictement ou faiblement) on a $\frac{\partial x_1^*}{\partial R} \leq 0$.

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

- Cette classification est utile pour déterminer, par exemple, le signe de $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$. En injectant $\frac{\partial x_1^*}{\partial R}$ dans $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$, on obtient l'**équation de Slutsky**:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{-\lambda^* p_2^2}{D} - x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R}$$

- Le premier terme $\frac{-\lambda^* p_2^2}{D}$ mesure l'**effet de substitution** ou l'**effet prix**. Ce terme est **toujours négatif** (car $D > 0$ et $\lambda^* = u_1/p_1 > 0$). Une hausse du prix du bien 1 conduit à une baisse de la demande de bien 1. Le consommateur réduit sa consommation de bien 1 et augmente sa consommation de bien 2 qui est devenu **relativement moins cher** (la consommation de bien 2 se substitue à celle de bien 1).

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

- Le second terme, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R}$, mesure l'**effet revenu** ou l'**effet pouvoir d'achat**.
- La hausse du prix du bien 1 réduit le **pouvoir d'achat** du consommateur (son revenu ne lui permet plus de consommer les quantités qu'il consommait avant la hausse de prix).
- Le consommateur est donc **appauvri** par la hausse de prix.
- L'impact sur la demande de bien 1 dépend du type du bien 1.

Analyse de statique comparative générale

Equation de Slutsky

- Si le bien 1 est **normal**, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R} < 0$, l'**effet revenu** conduit à une baisse de la demande de bien 1 (effets de substitution et de revenu jouent dans le même sens et la demande diminue sans ambiguïté).
- Si le bien 1 est **strictement inférieur**, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R} > 0$, l'**effet revenu** conduit à une hausse de la demande de bien 1 (**effet de substitution** et **effet de revenu** jouent en sens opposés, et si l'**effet revenu** l'emporte sur l'**effet de substitution**, alors la demande de bien 1 augmente alors que son prix augmente, c'est un bien **Giffen**).
- Si le bien 1 est **faiblement inférieur**, $-x_1^* \frac{\partial x_1^*}{\partial R} = 0$, l'**effet revenu** ne joue pas (seul l'**effet de substitution** joue et la demande diminue sans ambiguïté).

Definition (1)

Méthode générale de statique comparative. Soit un système de n équations, caractérisant un équilibre économique,

$$f^1(x_1^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$$

$$f^2(x_1^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$$

...

$$f^n(x_1^*, \dots, x_n^*; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0$$

Résoudre ce système consiste à déterminer les **valeurs d'équilibre** des n variables **endogènes** x_1^*, \dots, x_n^* , en fonction des m variables **exogènes** $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Definition (1 suite)

A l'équilibre, l'impact d'un changement de la variable **exogène** α_j sur la variable **endogène** x_i^* est donné par

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{|F|} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

où $|F| \neq 0$.

Definition (1 suite)

La matrice F est

$$F = \begin{bmatrix} f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^n & f_2^n & \dots & f_n^n \end{bmatrix}$$

La matrice F_{ij} est obtenue à partir de la matrice F , en remplaçant la i -ème colonne de F par la j -ème colonne de la matrice $n \times m$ suivante

$$M = \begin{bmatrix} -f_{\alpha_1}^1 & -f_{\alpha_2}^1 & \dots & -f_{\alpha_m}^1 \\ -f_{\alpha_1}^2 & -f_{\alpha_2}^2 & \dots & -f_{\alpha_m}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f_{\alpha_1}^n & -f_{\alpha_2}^n & \dots & -f_{\alpha_m}^n \end{bmatrix}$$

- Remarques sur la méthode générale de statique comparative:
 - On doit avoir $|F| \neq 0$.
 - Les dérivées partielles sont toutes évaluées au point d'équilibre initial et sont donc des nombres donnés.
 - Lorsque le système de n équations représente les **conditions du premier ordre** d'un **problème d'optimisation**, les **conditions du second ordre** pour ce problème donnent le signe de $|F|$, étant donné que c'est le **déterminant** de la **matrice Hessienne bordée** impliquée dans les **conditions du second ordre** associées au **problème d'optimisation** (voir **Section 3.2**).

- Noter qu'en différenciant les n équations d'équilibre par rapport à chaque variable **exogène** $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, on a le système de équations linéaires $FV = M$, où F est la **matrice des coefficients** associés aux variables, M est la **matrice des résultats**, et V est la **matrice des variables**:

$$V = \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial \alpha_1 & \partial x_1^* / \partial \alpha_2 & \dots & \partial x_1^* / \partial \alpha_m \\ \partial x_2^* / \partial \alpha_1 & \partial x_2^* / \partial \alpha_2 & \dots & \partial x_2^* / \partial \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial x_n^* / \partial \alpha_1 & \partial x_n^* / \partial \alpha_2 & \dots & \partial x_n^* / \partial \alpha_m \end{bmatrix}$$

- L'application de la **règle de Cramer** donne $\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{|F_{ij}|}{|F|}$.

- Noter que le produit matriciel FV donne la matrice de taille $n \times m$ suivante (de même taille que la matrice M)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_1 & \sum_{i=1}^n f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_2 & \dots & \sum_{i=1}^n f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_m \\ \sum_{i=1}^n f_i^2 \partial x_i^* / \partial \alpha_1 & \sum_{i=1}^n f_i^2 \partial x_i^* / \partial \alpha_2 & \dots & \sum_{i=1}^n f_i^2 \partial x_i^* / \partial \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_1 & \sum_{i=1}^n f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_2 & \dots & \sum_{i=1}^n f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_m \end{bmatrix}$$

- L'égalité $FV = M$ dit que chaque terme de cette matrice est égal à chaque terme de la matrice M . Par exemple, L1/C1 on a $\sum_{i=1}^n f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_1 = -f_{\alpha_1}^1$, L1/C2 on a $\sum_{i=1}^n f_i^1 \partial x_i^* / \partial \alpha_2 = -f_{\alpha_2}^1$, Ln/Cm on a $\sum_{i=1}^n f_i^n \partial x_i^* / \partial \alpha_m = -f_{\alpha_m}^n$, etc.

4.1 Introduction à la statique comparative

4.2 Analyse de statique comparative générale

4.3 **Théorème de l'enveloppe**

- Dans l'analyse de **statique comparative** des **problèmes d'optimisation contraints**, il est souvent utile de suivre une approche basée sur le **théorème de l'enveloppe**.
- Le **théorème de l'enveloppe** peut être vu comme un complément du **théorème des fonctions implicites**.
- Il permet de déterminer l'impact d'un changement d'une variable **exogène** sur la **fonction objectif**, évaluée au point solution, d'un **problème d'optimisation contraint**.

- Considérons le **problème de maximisation contraint** suivant

$$\max_{x_1, x_2} : f(x_1, x_2; \alpha) \quad \text{s.c.} \quad g(x_1, x_2; \alpha) = 0$$

où α est une variable **exogène**. On suppose que f et g sont deux fois continûment différentiables.

- La **fonction de Lagrange** associée est

$$L(x_1, x_2, \lambda; \alpha) = f(x_1, x_2; \alpha) + \lambda g(x_1, x_2; \alpha)$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = f_1(x_1^*, x_2^*; \alpha) + \lambda^* g_1(x_1^*, x_2^*; \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = f_2(x_1^*, x_2^*; \alpha) + \lambda^* g_2(x_1^*, x_2^*; \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1^*, x_2^*; \alpha) = 0$$

- Si les fonctions f et g possèdent des **dérivées partielles continues d'ordre 1 et d'ordre 2**, et si le **déterminant** de la **matrice Hessienne du Lagrangien** est non nul, i.e.

$$D = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} + \lambda^* g_{11} & f_{12} + \lambda^* g_{12} & g_1 \\ f_{21} + \lambda^* g_{21} & f_{22} + \lambda^* g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

alors on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

- Cela revient à dire que nous pouvons résoudre le **problème de maximisation contraint** (via les **conditions du premier ordre**) en exprimant les variables **endogènes** comme des **fonctions différentiables** $x_1^* = x_1(\alpha)$, $x_2^* = x_2(\alpha)$ et $\lambda^* = \lambda(\alpha)$, de la variable **exogène** α .

- En injectant les solutions $x_1^* = x_1(\alpha)$ et $x_2^* = x_2(\alpha)$, dans la **fonction objectif** $f(x_1, x_2; \alpha)$, on obtient la **fonction de valeur** du **problème de maximisation contraint**

$$V(\alpha) = f(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha)$$

- Cette fonction donne la **valeur de la fonction objectif**, aux alentours du point solution, en fonction de la variable **exogène**.

Théorème de l'enveloppe

- De manière similaire, en injectant les solutions $x_1^* = x_1(\alpha)$, $x_2^* = x_2(\alpha)$ et $\lambda^* = \lambda(\alpha)$, dans la **fonction de Lagrange** $L(x_1, x_2, \lambda; \alpha)$, on obtient

$$L = f(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha) + \lambda(\alpha) g(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha)$$

- On peut alors constater un fait intéressant en différenciant par rapport à la variable **exogène** α :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\alpha} &= f_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + f_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + f_\alpha + \frac{d\lambda}{d\alpha} g + \lambda \left[g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + g_\alpha \right] \\ &= [f_1 + \lambda g_1] \frac{dx_1}{d\alpha} + [f_2 + \lambda g_2] \frac{dx_2}{d\alpha} + g \frac{d\lambda}{d\alpha} + f_\alpha + \lambda g_\alpha \end{aligned}$$

Théorème de l'enveloppe

- D'après les **conditions du premier ordre**, au point solution, on a $f_1 + \lambda g_1 = 0$, $f_2 + \lambda g_2 = 0$ et $g = 0$. Ainsi on obtient

$$\frac{dL}{d\alpha} = f_\alpha + \lambda g_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

- La **variation totale du Lagrangien**, aux alentours du point solution, par rapport à un changement de la variable **exogène** α est simplement donnée par la **dérivée partielle du Lagrangien**.
- Du fait que l'on se situe au point solution, l'impact de la variable **exogène** α sur les variables **endogènes** x_1 , x_2 et λ disparaît (car d'après les **conditions du premier ordre**, les dérivées partielles du **Lagrangien** sont nulles à l'optimum).

Théorème de l'enveloppe

- Le **théorème de l'enveloppe** établit une connexion, au point solution, entre la différentielle totale de la **fonction de valeur** et la différentielle totale de la **fonction de Lagrange**, par rapport à la variable **exogène** α .
- En différenciant la **fonction de valeur** par rapport à la variable **exogène** α , on obtient

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = f_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + f_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + f_\alpha$$

- En substituant, d'après les **conditions du premier ordre**, $f_1 = -\lambda g_1$ et $f_2 = -\lambda g_2$, il vient

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = -\lambda \left[g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} \right] + f_\alpha$$

Théorème de l'enveloppe

- A l'optimum, on peut réécrire la **fonction contrainte** comme suit

$$g(x_1(\alpha), x_2(\alpha); \alpha) = 0$$

- En différenciant la **fonction contrainte** par rapport à la variable **exogène** α , on obtient

$$g_1 \frac{dx_1}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2}{d\alpha} + g_\alpha = 0$$

- En substituant, cette dernière relation dans $dV(\alpha) / d\alpha$, on aboutit à

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = f_\alpha + \lambda g_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

- C'est la forme que prend le **théorème de l'enveloppe** pour cet exemple.

- Le **théorème de l'enveloppe** nous apprend que nous pouvons déterminer l'impact d'un changement de la variable **exogène** α sur la **valeur optimale** de la **fonction objectif**, simplement en calculant la **dérivée partielle du Lagrangien**, évalué au point solution, par rapport à la variable **exogène** α .

Theorem (1)

Etant donné le **problème de maximisation contraint**

$$\begin{array}{ll} \max_{x_1, \dots, x_n} : f(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m) & \text{s.c.} \\ & g^1(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0 \\ & \dots \\ & g^K(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = 0 \end{array}$$

la **fonction de valeur** $V(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ et la **fonction de Lagrange**

$L = f + \sum_{k=1}^K \lambda_k g^k$ qui lui correspondent, on a

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_j} = f_{\alpha_j} + \sum_{k=1}^K \lambda_k g_{\alpha_j}^k$$

Théorème de l'enveloppe

- Une application simple, mais importante, du **théorème de l'enveloppe** donne l'interprétation des **multiplicateurs de Lagrange** associés aux contraintes d'un problème d'optimisation.
- Supposons que l'on a le **problème de maximisation contraint** suivant

$$\max_{x_1, \dots, x_n} : f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{s.c.} \quad \begin{array}{l} g^1(x_1, \dots, x_n) + \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ g^K(x_1, \dots, x_n) + \alpha_K = 0 \end{array}$$

où les K variables **exogènes** $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ intègrent les contraintes comme des "**constantes de contraintes**".

- La **fonction de Lagrange** est

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^K \lambda_k \left[g^k(x_1, \dots, x_n) + \alpha_k \right]$$

- En appliquant le **théorème de l'enveloppe** on a

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = \lambda_k^*$$

Théorème de l'enveloppe

- Ainsi, le **multiplicateur de Lagrange** λ_k^* mesure le taux auquel la **fonction de valeur** change lorsque la contrainte à laquelle le **multiplicateur** est associé se relâche "légèrement".
- Cette interprétation du **multiplicateur de Lagrange** est d'importance fondamentale dans les **applications économiques** des **problèmes d'optimisation contraints**.
- Une implication est immédiate. Si le relâchement d'une contrainte est sans conséquence sur la **valeur optimale** de la **fonction objectif**, alors le **multiplicateur de Lagrange** associé à cette contrainte est nul.

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût de long terme et de court terme

- Au regard du résultat qu'il établit, il n'est pas évident de comprendre pourquoi le **théorème de l'enveloppe** porte ce nom.
- La raison de cette dénomination est que le théorème a été découvert dans le cadre de l'étude de la relation entre les **coûts de long terme** et de **court terme**.
- Précisément, la **courbe de coût total de long terme** est l'**enveloppe inférieure** de l'ensemble des **courbes de coût total de court terme** générée en faisant varier le facteur fixe.
- Le **théorème de l'enveloppe** permet d'établir rigoureusement ce résultat.

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- Pour illustrer, considérons un exemple.
- Considérons une entreprise qui produit en quantité y un bien en utilisant deux facteurs de production, le travail L et le capital K .
- La technologie de production de l'entreprise est représentée par une fonction de production $f(L, K)$.

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- Le programme de **minimisation du coût total de production** de l'entreprise est

$$\min_{L,K} : wL + rK \quad s.c. \quad y = f(L, K)$$

où w est le taux de salaire et r le prix du capital.

- Il s'agit de réaliser un certain niveau de production y à moindre coût, en choisissant la combinaison travail/capital la moins chère possible et qui permet de réaliser le volume de production y .
- Graphiquement, dans le repère (L, K) , il s'agit de choisir un point sur l'**isoquante** de niveau y . Le meilleur choix est le point qui se trouve sur la **droite d'iso-coût** de niveau \bar{C} , d'équation $K = -\frac{w}{r}L + \frac{\bar{C}}{r}$ (la plus basse possible).

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- La **fonction de Lagrange** associée est

$$L(L, K, \lambda) = wL + rK + \lambda [y - f(L, K)]$$

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial L} &= w - \lambda f_L(L, K) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial K} &= r - \lambda f_K(L, K) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= y - f(L, K) = 0\end{aligned}$$

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- En combinant les deux premières **conditions du premier ordre** on obtient la **condition de tangence** discutée précédemment **Section 3**:

$$\frac{w}{r} = \underbrace{\frac{f_L(L, K)}{f_K(L, K)}}_{TMST_{K,L}}$$

- La troisième **condition du premier ordre** assure que la contrainte est vérifiée:

$$y = f(L, K)$$

- On dispose d'un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- Dans ce problème de **minimisation du coût total de production**, les variables **exogènes** sont w , r et y , tandis que les variables **endogènes** sont L et K .
- La résolution conduit aux **demandes optimales de facteurs** travail $L^* = L(w, r, y)$ et capital $K^* = K(w, r, y)$, i.e. les variables **endogènes** sont exprimées en fonction des variables **exogènes**.
- En substituant ces solutions dans la **fonction objectif**, on obtient la **fonction de valeur**, appelée **fonction de coût total de long terme** dans ce contexte:

$$\begin{aligned}C^* &= wL^* + rK^* \\ &= wL(w, r, y) + rK(w, r, y) \\ &= C(w, r, y)\end{aligned}$$

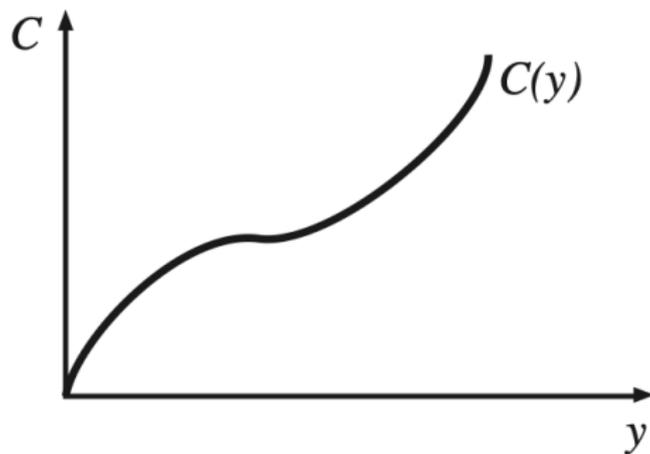
Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- Si le marché du travail et du capital sont **concurrentiels**, les prix des facteurs de production sont fixes.
- On note ainsi, plus simplement, la **fonction de coût total de long terme** $C(y)$.
- Cette fonction est représentée **Figure 13**.
- Elle illustre comment le coût total minimum évolue en fonction de l'objectif de production y , pour un niveau donné des prix des facteurs de production.

Théorème de l'enveloppe

Figure 13



Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- La différence entre le **long terme** et le **court terme** est la suivante.
- A **long terme**, **tous** les facteurs de production sont **variables**.
- A **court terme**, **certain**s facteurs de production sont **fixes**.

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- Supposons ici que le capital est fixe à **court terme**, tandis que le travail reste variable. On note K_a le stock de capital disponible et $F_a = rK_a$ son coût fixe.
- Le programme de **minimisation du coût total de production** de l'entreprise à **court terme** est

$$\min_L : wL + F_a \quad \text{s.c. } y = f(L, K_a)$$

- Il s'agit de réaliser un certain niveau de production y à moindre coût. Il s'agit donc simplement de choisir la quantité de travail minimale, c'est à dire celle qui vérifie la contrainte.
- Graphiquement, dans le repère (L, K) , il s'agit de choisir un point sur l'**isoquante** de niveau y . Le choix est ici trivial. La demande optimale de travail L^* est simplement l'abscisse de correspondant à l'ordonnée K_a sur l'**isoquante** de niveau y .

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- On note la demande optimale de travail

$$L^{CT} = \phi(y, K_a)$$

- En l'injectant dans la **fonction objectif**, on obtient la **fonction de valeur** qui est la **fonction de coût total de court terme** dans ce contexte

$$\begin{aligned} C^{CT} &= wL^{CT} + F_a \\ &= w\phi(y, K_a) + F_a \\ &= c(y, K_a) \end{aligned}$$

Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

- On note y_a le niveau de production tel que le **coût total de long terme** égalise le **coût total de court terme**:

$$C(y_a) = c(y_a, K_a)$$

où $K_a = K^*$.

- Comme l'illustre la **Figure 14a**, La courbe de **coût total de court terme** est toujours **au dessus** de la courbe de **coût total de long terme** (on ne peut pas faire moins bien en étant libre d'ajuster le niveau de capital) et les deux courbes se touchent uniquement pour le niveau de production y_a :

$$c(y, K_a) > C(y) \quad \forall y \neq y_a$$

- On peut montrer que **théorème de l'enveloppe** permet d'établir que $c_y(y_a, K_a) = C'(y_a)$, d'où le **point de tangence** entre les deux courbes en y_a . Nous laissons ici l'aspect technique de ce point en nous contentant de l'analyse graphique.

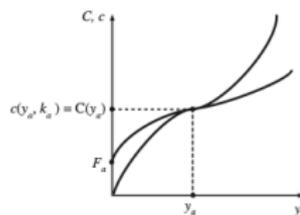
Théorème de l'enveloppe

Courbes de coût à long terme et à court terme

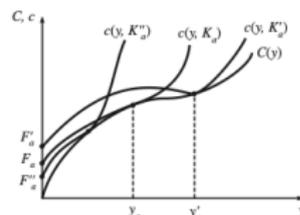
- Lorsque l'on fait varier le niveau de capital fixe K_a à **court terme**, on obtient une **nouvelle courbe de coût total de court terme**.
- Si l'on augmente le niveau de capital fixe à un niveau $K'_a > K_a$, on obtient la **nouvelle courbe de coût total de court terme** $c(y, K'_a)$ avec un **nouveau point de tangence** $y'_a > y_a$.
- Si l'on diminue le niveau de capital fixe à un niveau $K''_a < K_a$, on obtient la **nouvelle courbe de coût total de court terme** $c(y, K''_a)$ avec un **nouveau point de tangence** $y''_a < y_a$.
- La **Figure 14b** illustre ainsi que la **courbe de coût total de long terme** est l'**enveloppe inférieure** des **courbes de coût total de court terme** générées en faisant varier le facteur fixe.

Théorème de l'enveloppe

Figure 14



(a) Short-run and long-run cost functions



(b) Envelope relation

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- On considère un planificateur central contrôlant une économie à deux secteurs, le secteur 1 produisant le bien 1 en quantité x_1 , et le secteur 2 produisant le bien 2 en quantité x_2 .
- On suppose que l'économie est une petite économie ouverte (par rapport au reste du monde) qui considère ainsi les prix p_1 et p_2 (des biens 1 et 2, respectivement) comme fixés par le marché mondial.
- Le planificateur cherche à maximiser le produit national Y de son pays compte tenu des prix mondiaux.
- Le facteur travail est le seul facteur disponible en quantité limitée L^0 .

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- Le problème du planificateur est donc d'allouer de manière optimale une certaine proportion du facteur travail disponible à chaque secteur.
- Les fonctions de production des secteurs 1 et 2 sont respectivement

$$x_1 = a_1 L_1^b \quad \text{et} \quad x_2 = a_2 L_2^b$$

où L_i est la quantité de travail employée dans le secteur $i = 1, 2$, avec $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $0 < b < 1$.

- Le produit national est donc

$$Y = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 a_1 L_1^b + p_2 a_2 L_2^b$$

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- Le **problème de maximisation contraint** du planificateur est

$$\max_{L_1, L_2} : p_1 a_1 L_1^b + p_2 a_2 L_2^b \quad \text{s.c. } L^0 = L_1 + L_2$$

- La **fonction de Lagrange** associée est

$$L(L_1, L_2, \lambda) = p_1 a_1 L_1^b + p_2 a_2 L_2^b + \lambda [L^0 - L_1 - L_2]$$

- Remarquons que L^0 est une **constante contrainte**.

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- Les **conditions du premier ordre** sont

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 a_1 b L_1^{b-1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 a_2 b L_2^{b-1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L^0 - L_1 - L_2 = 0$$

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- En combinant les deux premières **conditions du premier ordre** on obtient

$$p_1 a_1 L_1^{b-1} = p_2 a_2 L_2^{b-1}$$

- La troisième **condition du premier ordre** assure que la contrainte est vérifiée:

$$L^0 = L_1 + L_2$$

- On dispose d'un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre.

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- Les solutions sont

$$L_1^* = \alpha^* L^0 \quad \text{et} \quad L_2^* = [1 - \alpha^*] L^0$$

où

$$\alpha^* = \alpha(p_1, p_2) = \left[1 + \left[\frac{p_1 a_1}{p_2 a_2} \right]^{\frac{1}{b-1}} \right]^{-1}$$

est la part optimale du travail disponible L^0 allouée au secteur 1 (et $1 - \alpha^*$ celle allouée au secteur 2).

- On peut noter que L_1^* et L_2^* sont des fonctions linéaires de L^0 . La règle d'allocation optimale du travail entre les deux secteurs ne dépend pas du niveau de travail disponible L_0 (i.e. ne dépend pas de la taille de l'économie). Elle ne dépend que des prix mondiaux des biens p_1 et p_2 (et des paramètres technologiques a_1 , a_2 et b supposés constants).

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- En substituant les solutions dans la **fonction objectif**, on obtient la **fonction de valeur**, soit la **valeur optimisée du produit national**

$$\begin{aligned} Y^* &= p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \\ &= p_1 a_1 [\alpha^* L^0]^b + p_2 a_2 [(1 - \alpha^*) L^0]^b \\ &= p_1 a_1 [\alpha(p_1, p_2) L^0]^b + p_2 a_2 [1 - \alpha(p_1, p_2)] L^0]^b \\ &= V(p_1, p_2, L^0) \end{aligned}$$

- On s'intéresse alors à l'impact d'un changement du travail disponible L^0 et des prix mondiaux des biens p_1 et p_2 , sur le produit national.

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- D'après le **théorème de l'enveloppe**, on a

$$\frac{\partial V}{\partial L^0} = \frac{\partial L}{\partial L^0} = \lambda^* = p_1 a_1 b [L_1^*]^{b-1}$$

- Le **multiplicateur de Lagrange** mesure l'impact du relâchement de la contrainte, i.e. comment le revenu national varie lorsque la quantité de travail disponible augmente légèrement.
- On peut interpréter λ^* comme étant la disposition maximale à payer du planificateur pour obtenir une légère hausse de la quantité de travail dont il dispose. On parle alors de **taux de salaire fictif** ou **prix fictif** du travail.

Théorème de l'enveloppe

Taux de salaire fictif

- D'après le **théorème de l'enveloppe**, on a également

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \frac{\partial L}{\partial p_1} = a_1 [L_1^*]^b = a_1 [\alpha^* L^0]^b$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial p_2} = \frac{\partial L}{\partial p_2} = a_2 [L_2^*]^b = a_2 [(1 - \alpha^*) L^0]^b$$

- Le **théorème de l'enveloppe** permet ici d'obtenir facilement l'impact d'une légère variation des prix mondiaux des biens sur le revenu national (sans calculer deux dérivées plutôt complexes de la fonction V par rapport à p_1 et p_2).