TD de mathématiques pour économistes

Licence 1 Economie

Mickael Beaud
Université de Montpellier

March 19, 2023

Thème 3. Optimisation contrainte

1 Problèmes contraints

Exercice 1

Résoudre les problèmes d'optimisation contrainte suivants dans $\mathbb{R}^2_{++}$. Illustrer graphiquement dans le repère (x_1, x_2).

1. max : $y = 2x_1 + 3x_2 \quad s.c.\ 10 - 2x_1^2 - 5x_2^2 = 0$
2. max : $y = x_1^{0,25} x_2^{0,75} \quad s.c.\ 10 - 2x_1^2 - 5x_2^2 = 0$
3. min : $y = 2x_1 + 4x_2 \quad s.c.\ 10 - x_1^{0,25} x_2^{0,75} = 0$
4. max : $y = [x_1 + 2]\,[x_2 + 1] \quad s.c.\ 21 - x_1 - x_2 = 0$

Exercice 2

Un individu consomme deux biens, le bien 1 en quantité x_1, et le bien 2 en quantité x_2. Le consommateur dispose d'un revenu exogène R qu'il consacre intégralement à la consommation. Il peut acheter les biens sur des marchés concurrentiels aux prix unitaires p_1 et p_2 pour le bien 1 et le bien 2, respectivement. Les préférences du consommateur sont représentées par une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$.

1. Ecrire et résoudre le problème contraint en utilisant la méthode de Lagrange.
2. Montrer que l'élasticité prix de la demande vaut -1. Interpréter.
3. Montrer que l'élasticité revenu de la demande vaut 1. Interpréter.

Exercice 3

Une entreprise concurrentielle produit un bien en quantité y, en utilisant deux facteurs de production, le travail en quantité L, acheté au prix unitaire constant w, et le capital en quantité K, acheté au prix unitaire constant r. La fonction de production de l'entreprise est $y = f(L, K)$.

1. Ecrire le problème contraint de minimisation du coût et la fonction de Lagrange associée.
2. A partir des conditions du premier ordre, montrer que le multiplicateur de Lagrange est égal au coût marginal. Interpréter.

Exercice 4

Considérer le problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e) de la Section 3.1 du CM.

1. Tracer les courbes de niveau du résultat moyen et illustrer la solution comme un point tangence dans le repère (t_1, t_2).

2 Conditions du second ordre pour l'optimisation contrainte

Exercice 1

Considérer les fonctions de l'Exercice 1 (Problèmes contraints) pour lesquelles nous avons identifié les valeurs stationnaires de la fonction de Lagrange.

1. Dans chaque cas, en utilisant le Théorème 3 de la Section 3.2 du CM, montrer qu'il s'agit bien d'un optimum.

Exercice 2

Considérer le problème d'allocation temporelle de l'étudiant(e) de la Section 3.1.

1. En utilisant le Théorème 3 de la Section 3.2 du CM, montrer que la solution identifiée est bien un maximum.

3 Existence, unicité et caractérisation des solutions

Exercice 1

Considérer les fonctions de l'Exercice 1 (Problèmes contraints) pour lesquelles nous avons identifié les valeurs stationnaires de la fonction de Lagrange.

1. Montrer que les conditions du Théorème 7, Section 3.3 sont vérifiées sur $\mathbb{R}^2_{++}$.

Exercice 2

Considérer des fonctions à une variable $f(x)$.

1. Tracer un exemple de fonction admettant un maximum sur un intervalle ouvert.
2. Tracer un exemple de fonction admettant un maximum sur un intervalle non-borné.

Exercice 3

Considérer le problème de maximisation d'une fonction $f(x_1, x_2)$, avec une fonction contrainte $g(x_1, x_2) = 0$.

1. Tracer un exemple où f est strictement quasiconcave et g est indéterminée, de telle sorte que l'on puisse identifier un maximum local qui ne soit pas un maximum global.
2. Tracer un exemple où f est indéterminée et g est strictement quasiconvexe, de telle sorte que l'on puisse identifier un maximum local qui ne soit pas un maximum global.
3. Tracer un exemple où f est quasiconcave et g est quasiconvexe, de telle sorte que l'on puisse identifier plusieurs maximum globaux.
4. Tracer un exemple où f est strictement quasiconcave et g est strictement quasiconvexe. Conclure qu'on obtient nécessairement un unique maximum global.
5. Tracer un exemple où f est strictement quasiconcave et g est linéaire. Conclure qu'on obtient nécessairement un unique maximum global.
6. Tracer un exemple où f est strictement quasiconvexe et g est strictement quasiconvexe, de telle sorte que l'on puisse identifier un unique maximum global.