HAC310X Mathématiques pour la Chimie
Contrôle continu n°1

NOM :
Prénom :
Groupe :

Durée : 1h ; calculatrice non autorisée, aucun document autorisé.
Merci de répondre sur le sujet dans les cadres prévus à cet effet.

Exercice 1 [Calcul vectoriel].

2 pts (a) Soient $\mathbf{u} = (-1, 1, -2)$ et $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$. Trouver l'angle entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

1 pt (b) Trouver un vecteur orthogonal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

1 pt (c) Soient $\mathbf{s} = (\frac{1}{2}, -3)$ et $\mathbf{t} = (-2, 12)$. Les vecteurs $\mathbf{s}$ et $\mathbf{t}$ sont-ils parallèles ? orthogonaux ? aucun des deux ? (justifiez votre réponse)

a) $u \cdot v = (-1,1,-2)\cdot(1,2,-1) = -1+2+2 = 3$

$\|u\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\|v\| = \sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Donc, $3 = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos(\widehat{uv}) = 6\cos(\widehat{uv}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos(\widehat{uv}) \Leftrightarrow \widehat{uv} = \pi/3$

b) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = i(-1+4) - j(1+2) + k(-2-1) = 3i-3j-3k$

Donc, un vecteur orthogonal à u et v est $(3,-3,-3)$.

c) On a $\vec{t} = (-2,12) = -4(\frac{1}{2},-3) = -4\vec{s}$ et donc $\vec{t}$ et $\vec{s}$ sont parallèles.

(2ème méthode) $s\cdot t = -37$, $\|s\| = \frac{\sqrt{37}}{2}$, $\|t\| = 2\cdot\sqrt{37}$. Donc

$-37 = \frac{\sqrt{37}}{2} \times 2\cdot\sqrt{37}\cos(\widehat{st}) = 37\cos(\widehat{st}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{st}) = -1$

$\Leftrightarrow \widehat{st} = \pi$

$\Leftrightarrow \vec{s}$ et $\vec{t}$ sont parallèles.

Exercice 2 [Matrice]. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2 pts (a) A est-elle inversible ? Si c'est le cas, calculer son inverse.

1 pt (b) A est-elle orthogonale ?

$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 9-4 = 5 \neq 0$ Donc A est inversible.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A^t$

donc A n'est pas orthogonale.

Exercice 3 [Valeurs et vecteurs propres]. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 pts (a) Trouver les valeurs propres de A.

2 pts (b) Déterminer les vecteurs propres correspondants (c-à-d, les solutions avec chaque valeur propre).

a)

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right) - (2-\lambda+1) + (1+2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)^3 - 2+\lambda+2+\lambda-1+1+2-\lambda$$

$$= (2-\lambda)^3 + \lambda - 2 = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right) = (2-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-1)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$

b) • Par $\lambda = 1$, on trouve le système

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+2z=0 \Rightarrow y=-z \text{ donc } x+(-z)+z=0 \Rightarrow x=0$$

Sol$^{\underline{ns}}$ $(0,-z,z)$

• Par $\lambda = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+z=0 \\ -x+y=0 \end{array}\right\} z+y=0 \Rightarrow y=-z \text{ donc } x-z=0 \Rightarrow x=z$$

Sol$^{\underline{ns}}$ $(z,-z,z)$

• Par $\lambda = 3$

$$\left.\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} 2z=0 \Rightarrow z=0 \text{ donc } -x+y+0=0 \Rightarrow x=y$$

$$-x+y-z=0$$

Sol^{ns} $(x,x,0)$.

Exercice 4 [Nombres complexes].

1 pt (a) Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ le nombre $(\frac{1+i}{2-i})^2$.

2 pts (b) Trouver les racines cubiques de 1 (c-à-d, les trois solutions de l'équation $z^3=1$).

2 pts (c) Donner les solutions sous forme trigonométrique.

2 pts (d) Est-il vrai que le nombre $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est l'une des racines cubiques de 1 ? qu'en est-il de $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$?

1 pt (e) Désignons par z_1, z_2 et z_3 les trois racines cubiques de 1. Est-il vrai que $z_1+z_2+z_3=0$?

a) $\frac{1+i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{1+3i}{5}$ Donc $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2=\frac{-8+6i}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$

b) Soit $z=re^{i\theta}$. Donc, $r^3e^{3\theta i}=(re^{i\theta})^3=1\cdot e^{0\cdot i}$

D'où $r^3=1 \Rightarrow r=1$ et $3\theta=0+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

$k=0\Rightarrow\theta=0$, $k=1\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}$, $k=2\Rightarrow\theta=\frac{4\pi}{3}$

Les sol^ns sont : $z_1=1\cdot e^0=1$

$z_2=1\cdot e^{2\pi/3\cdot i}$

$z_3=1\cdot e^{\frac{4\pi}{3}\cdot i}$

c) $z_1=1$

$z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) Oui, d'après (c).

e) $z_1+z_2+z_3=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=1-\frac{1}{2}+\cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}-\cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=1-1=0$