Volume de la Sphere d'Hamming et Entropie

Def : (Volume de la Sphère d'Hamming)

Soit $q \geq 2$, $n \geq r \geq 1$ entiers.

$$Vol_q(r,n) = |B_q(0,r)| = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} (q-1)^i$$

Invariant par centre de la sphère, donc on calcule avec 0

Prop

Soit $q \geq 2$, $0 \leq p \leq 1-\frac{1}{q}$ réel.

① $Vol_q(pn,n) \leq q^{H_q(p)n}$

Bonus

② pour $n \gg 0$ $Vol_q(pn,n) \geq q^{H_q(p)n - o(n)}$

Preuve ①

$$1 = (p+(1-p))^n$$
$$= \sum_{i=0} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{pn} \ldots + \sum_{i=pn+1}^{n} \ldots \geq \underbrace{\sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}$$
$$= \sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} (q-1)^i \left(\frac{p}{q-1}\right)^i (1-p)^{n-i}$$
$$\geq \underbrace{\sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} (q-1)^i (1-p)^n \left(\frac{p}{(q-1)(1-p)}\right)^{pn}}$$
$$= \sum_{i=0}^{pn} \binom{n}{i} (q-1)^i \left(\frac{p}{q-1}\right)^{pn} (1-p)^{(1-p)n}$$
$$\geq Vol_q(pn,n)\, q^{-H_q(p)n}$$