Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Licence 2 - HAC310X Mathématiques pour la Chimie S3

Solutions - Devoir Encadré No 1

Problème 1. Soient $\mathbf{u} = (2, 3, 5)$ et $\mathbf{v} = (5, 6, 1)$.

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = i(3-30) - j(2-25) + k(12-15) = -i27 + j23 - k3 =$ $(-27, 23, -3)$ (un autre vecteur orthogonal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est $(27, -23, 3)$).

b) $Aire = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(27)^2 + (-23)^2 + 3^2} = \sqrt{729 + 529 + 9} = \sqrt{1267}$.

Problème 2. a) $\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$ donc A est inversible.

b) En utilisant que $d_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$, nous avons $A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Comme $A^{-1} \neq A^t$ alors A n'est pas orthogonale.

Problème 3. a) On calcule $D = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 5 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} D &= (-2-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda) - 5] - [(1)(-\lambda) - (-1)(5)] + [(1)(1) - (-1)(2-\lambda)] \\ &= (2-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 - 5) - (-\lambda + 5) + (\lambda + 2 - \lambda) \\ &= 4\lambda - 2\lambda^2 + 10 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 5\lambda + \lambda - 5 + 3 - \lambda \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda + 8. \end{aligned}$$

Une racine évidente de $-\lambda^3+9\lambda+8$ est $\lambda = -1$. Donc, $-\lambda^3+9\lambda+8 = -(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-8)$. Les autres deux racines de $\lambda^2 - \lambda - 8$ sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-8)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

b) Pour $\lambda = -1$ Nous avons

$$\begin{array}{rrrl} -2x & +y & +z & = \lambda x \\ x & +2y & +5z & = \lambda y \\ -x & +y & & = \lambda z \end{array} \quad \text{et donc} \quad \begin{array}{rrrl} -x & +y & +z & = 0 \ldots (1) \\ x & +3y & +5z & = 0 \ldots (2) \\ -x & +y & +z & = 0 \ldots (3) \end{array}$$

En combinant (1) et (2) on a $y = -\frac{3}{2}z$ que l'on remplace dans (3) et on obtient $z = -2x$. En utilisant cette dernière égalité avec (3) on a $y = 3x$. Alors, on a une infinité de solutions de la forme $(x, -3x, -2x)$.

Pour $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$ Nous avons

$$\begin{array}{rrrl} \frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}x & +y & +z & = 0 \dots (1) \\ x & +\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}y & +5z & = 0 \dots (2) \\ -x & +y & +\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}z & = 0 \dots (3) \end{array}$$

On obtient

pour $\lambda = \frac{1}{2}(1+\sqrt{33})$ la solution est $(1, -\frac{-9+\sqrt{33}}{-5+\sqrt{33}}, 1)$ et

pour $\lambda = \frac{1}{2}(1-\sqrt{33})$ la solution est $(1, -\frac{9+\sqrt{33}}{5+\sqrt{33}}, 1)$.

Problème 4.

a) Soit $w = 1+i$. Alors, $w^2 = (1+i)(1+i) = 1+i+i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$ et donc $w^3 = 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2$.

b)

$$\begin{aligned} z^3 = 8 &\iff (re^{i\theta})^3 = 1, \quad r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in]-\pi, \pi[\\ &\iff r^3 e^{i3\theta} = 8 = 8e^{i0} \\ &\iff r^3 = 8,\ 3\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff r = 2,\ \theta \in \{0, \tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{4\pi}{3}\} = \{0, \tfrac{2\pi}{3}, -\tfrac{2\pi}{3}\}. \end{aligned}$$

Nous avons que les racines cubiques de z sont :

$z_1 = 2e^{i0\pi} = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$,

$z_2 = 2e^{(\frac{2\pi}{3})} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})i = -1 + \sqrt{3}i$ et

$z_3 = 2e^{(\frac{4\pi}{3})} = 2(\cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})) = 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})i = -1 - \sqrt{3}i$.

Problème 5. On constante que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^4 + x^6} = \sqrt{x^4(1+x^2)} = x^2\sqrt{1+x^2}$. Or la fonction $1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $\sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont. On en déduit que f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Comme $f(x) = \sqrt{x^4 + x^6} = (x^4 + x^6)^{1/2}$ alors

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x^6)^{-1/2}(2x + 6x^5).$$

Problème 6. On présent deux approaches.

Méthode 1) Posons $f(x) = e^x - x - 1$ alors f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = e^x - 1 \geq 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Alors, $f(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ et donc $e^x \geq 1 + x$.

Méthode 2) Soit $x \geq 0$. f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ et donc, d'après le théorème accroissement finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

Or $f'(c) = e^c - 1 \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc $\frac{f(x)-0)}{x} = e^c - 1 \geq 0$ d'où $f(x) \geq 0$.

Problème 7. a) On calcule $\int x^2 \sin x dx$ on fait une intégration par parties $u = x^2$ et $v' = \sin x$ et donc $u' = 2x$ et $v = -\cos x$. Alors,

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - 2\int x(-\cos x)dx = -\cos(x)x^2 + 2\int x(\cos x)dx$$

Pour cette dernière intégrale, on fait une nouvelle intégration par parties $u = x$ et $v' = \cos x$ et donc $u' = 1$ et $v = \sin x$. D'où,

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x dx &= -\cos(x)x^2 + 2\int x(\cos x)dx \\
&= -\cos(x)x^2 + 2(x\sin x - \int \sin x dx) \\
&= -\cos(x)x^2 + 2x\sin x - 2(-\cos x) + C \\
&= (2 - x^2)\cos(x) + 2x\sin x + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Pour $\int x^2(\sin x)^3 dx$ on considère $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\sin x)^3 &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\
&= -\frac{\sin(3x)}{4} + \frac{3\sin(x)}{4}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\int x^2(\sin x)^3 dx = x^2\left(\frac{3\sin(x)}{4} - \frac{\sin(3x)}{4}\right)dx = \frac{3}{4}\int x^2 \sin x dx - \frac{1}{4}\int x^2 \sin(3x)dx \quad (0.1)$$

La première intégrale est fait en (a). On calcule la deuxième par un changement de variable $u = 3x$ et donc $du = 3dx$, d'où

$$\int x^2 \sin(3x)dx = \int \left(\frac{u}{3}\right)^2 \sin u \frac{du}{3} = \frac{1}{27}\int u^2 \sin u du$$

et d'après (a) on trouve

$$\frac{1}{27}\int u^2 \sin u du = \frac{1}{27}\left((2-u^2)\cos u + 2u\sin u\right) = \frac{1}{27}\left((2-9x^2)\cos(3x) + 6x\sin(3x)\right). \quad (0.2)$$

Finalement, en utilisant (0.1) et (0.2)

$$\int x^2(\sin x)^3 dx = \frac{3}{4}(2-x^2)\cos x + 2x\sin x - \frac{1}{4}\frac{1}{27}\left((2-9x^2)\cos(3x) + 6x\sin(3x)\right) + C.$$