Méthode de Ritz

Vous pourrez faire les intégrations soit de façon exacte soit par la méthode de Gauss

1 **Méthode de Ritz.**

L'objectif de cet exercice est d'étudier une poutre sousmise

à une force répartie et de déterminer $v(\frac{L}{2})$. La répartition de cette force, en $\frac{N}{m}$, est parabolique (Fig 1). Son équation est donnée par :

$$f(x) = \frac{(x-L)^2}{L^2} \tag{1}$$

La poutre de section rectangulaire a une longueur L, une largeur b et une hauteur h. Elle est composée d'un matériau homogène isotrope caractérisé par son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν. Vous vous situerez dans le cadre des petites perturbations et d'un problème uniquement de flexion. La poutre est encatrée en $x = 0$ et en appui simple en $x = L$(Fig.1).

1.1 Énumerer les conditions aux limites du problème.

1.2 Écrire l'énergie potentielle du système.

1.3 En utilisant l'une des fonctions de base suivantes, dont vous justifierez le choix :

$$P_1(x) = sin(\frac{\Pi x}{L}) \tag{2}$$
$$P_2(x) = x(x-L) \tag{3}$$
$$P_3(x) = x^2(x-L) \tag{4}$$
$$P_4(x) = x(x-L)^2 \tag{5}$$

Écrire le système linéaire permettant de déterminer l' inconnue du système.

1.4 Résoudre le système et calculer $v(\frac{L}{2})$.

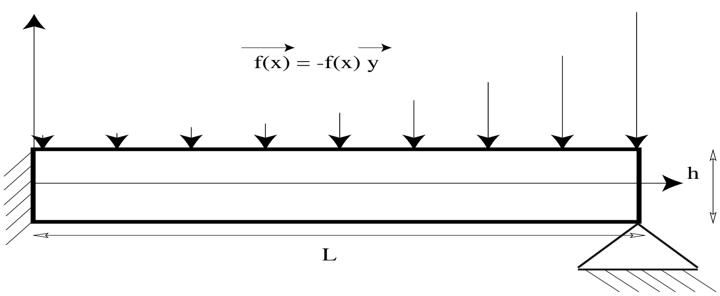

FIGURE 1 – système à étudier

2 Méthode de Ritz.

L'objectif de cet exercice est d'étudier une poutre sousmise à une force répartie et de déterminer $v(\frac{L}{2})$. La répartition de cette force, en $\frac{N}{m}$, est linéaire (Fig 1). Son équation est donnée par :

$$f(x) = f\frac{x}{L} \tag{6}$$

La poutre de section rectangulaire a une longueur L, une largeur b et une hauteur h. Elle est composée d'un matériau homogène isotrope caractérisé par son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν. Vous vous situerez dans le cadre des petites perturbations et d'un problème uniquement de flexion Fig :2. La poutre est encastrée en $x = 0$ et en $x = L$.

1.1 Écrire les conditions aux limites.
1.2 Écrire l'énergie potentielle du système.
1.3 En utilisant 2 fonctions de base valide (justifiez votre réponse) ,

$$P_1(x) = x(x-L)^2 \tag{7}$$
$$P_2(x) = x^2(x-L) \tag{8}$$
$$P_3(x) = x^2(x-L)^2 \tag{9}$$
$$P_4(x) = (1-cos(\frac{\Pi x}{L}) \tag{10}$$

Écrire le système linéaire permettant de déterminer les inconnues du système.
1.4 Résoudre le système

1.5 En déduire $v(\frac{L}{2})$.

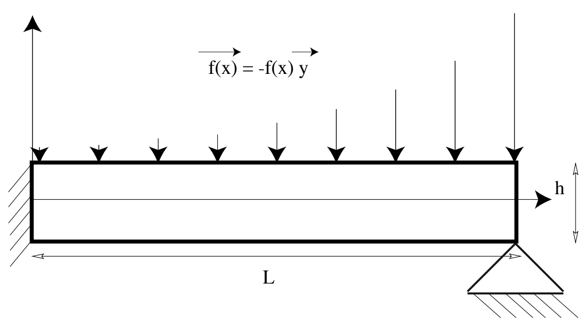

FIGURE 2 – Système à étudier

3 Méthode de Ritz.

L'objectif de cet exercice est de dimensionner une colonne constituée d'un matériau poreux soumise à une force à son extrémité (Fig 3). Elle est composée d'un matériau homogène caractérisé par son module d'Young variable $E(x) = E_0(1 + \frac{x}{L})$ et son coefficient de Poisson ν. La poutre a une longueur

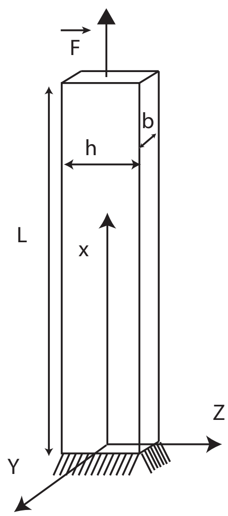

FIGURE 3 – Poutre de section rectangulaire et chargement

L et une section rectangulaire, notée S, de hauteur h et de largeur b. Le chargement est défini par (Fig 3).
Nous considérerons uniquement l'énergie de traction. Vous vous situerez dans le cadre des petites perturbations. $\epsilon_{11} = \frac{\partial}{\partial x}U(x,y)$
Nous rappelons que la cinématique utilisée est celle de Bernouilli définie par :

$$U(x,y) = \begin{cases} u(x) - yv'(x) \\ v(x) \end{cases}$$

1.2 Écrire l'énergie potentielle du système.
1.3 Écrire le système linéaire permettant de déterminer les inconnues du système, en utilisant une fonctions de base en justifiant votre choix,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (x-L) && (11) \\ P_2(x) &= x && (12) \\ P_3(x) &= x(x-L) && (13) \\ P_4(x) &= x^2 && (14) \end{aligned}$$

1.4 Résoudre le système et déterminer $u(x)$.
1.5 Donnez l'expression littérale du déplacement à l'extrémité de la poutre.
1.6 Déterminer $u(\frac{L}{2})$,en choisissant $h = b = 1\,mm$; $E_0 = 1\,Mpa$ et $F = 1\,N$.