Solutions TD 1 : Matrices

Exercice 1.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (3, 1, -1), (1, 2, -3) \rangle = 3 + 2 + 3 = 8.$$

On sait que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \times \|\mathbf{v}\| \times \cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v}))$. Alors,

$$8 = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \times \cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v})) = \sqrt{11} \times \sqrt{14} \times \cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v})).$$

Donc, $\cos(\angle(\mathbf{u}; \mathbf{v})) = \frac{8}{\sqrt{11 \times 14}} \approx \frac{8}{12{,}409} \approx 0,6446$.
L'angle cherché est donc donné par $\arccos(0.6446) \approx 0,8702963631$.

Exercice 2.
a) On rappelle que $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$. Donc,

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 4\mathbf{w} = (4i - 2j + 6k) + (2j - 2k) + 4(-k) = 4i = 4(1, 0, 0) = (4, 0, 0).$$

b) Un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{w} = (0, 0, -1)$ et $\mathbf{x} = (4, 0, 0)$ est donné par

$$\mathbf{x} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i(0) - j(-4) + k(0) = 4j = (0, 4, 0).$$

c) Un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{w} = (0, 0, -1)$ et $\mathbf{v} = (0, 2, -2)$ est donné par

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i(-2) - j(0) + k(0) = -2i = (-2, 0, 0).$$

d) Ils sont orthogonaux car $3s = 3(1, 6) = (3, 18) = t$.

Exercice 3.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 5-12 \\ 0-2 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B + BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+0 & 4-5 \\ 2+0 & 8+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 4-4 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3B - A^3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a)

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - (0) \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (1) \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(-8) + 0 + (1)(-10+12) = 8 + 2 = 10 \neq 0$$

A est donc inversible.

On rappelle que $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(d_{ij})$ avec $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ où A_{ji} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne j et la colonne i. Nous avons

$d_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -8,$

$d_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -10,$

$d_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = 2,$

$d_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2,$

$d_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -5,$

$d_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2,$

$d_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4,$

$d_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 5,$

$d_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 4.$
Obtenant

$$A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & -10 & 2 \\ -2 & -5 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
c) $AA^t \neq I_3$. A n'est donc pas orthogonale.

Exercice 5.

$$AA^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est bien orthogonale.

Exercice 6.
a) $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 = -1.$
$\det(B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -3 - 10 = -13.$
On en déduit $\det(AB) = \det(A)\det(B) = (-1)(-13) = 13.$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}$.
On en déduit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{13} & -\frac{17}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$.

Exercice 7.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (1)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - (1)\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (1)\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0-3+3 = 0.$$

Comme $\det A \neq 0$ il n'y a pas de solution unique.
A partir du système : $\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{cases}$
La difference de deux premières équations donne $x = 1$ et en remplaçant cette valeur dans la première équation on obtient $y = 1 - z$. Nous avons une infinité de solutions

$(1, 1-z, z)$ dépendant du paramètre z.

Exercice 8. $\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x+y+z &= 3 \\ x+2y+z &= 3 \end{cases}$
La difference de deux premières équations donne $x = 1$ et en remplaçant cette valeur dans la première équation on obtient $y = 1 - z$. En remplaçant $x = 1$ et $y = 1 - z$ dans la troisième équation on obtient $z = 0$. Finalement, nous trouvons $y = 1$. Nous avons que l'unique solution est $(1, 1, 0)$.

Exercice 9. a) Calculons

$$D = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Alors,

$$D = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2-4]-2[2(2-\lambda)-4]+2[4-2(2-\lambda)] = (2-\lambda)(4_4\lambda+\lambda^2-4)-4(2-\lambda)+8+8-4(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2)-8+4\lambda+16-8+4\lambda = -8\lambda+2\lambda^2+4\lambda^2-\lambda^3+8\lambda = -\lambda^3+6\lambda^2 = -(\lambda-6)\lambda^2$$

On a donc que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 6$ (qui sont les racines de $-(\lambda-6)\lambda^2 = 0$).

b) Pour $\lambda = 0$, on a le système $\begin{cases} 2x+2y+2z = 0x \\ 2x+2y+2z = 0y \\ 2x+2y+2z = 0z \end{cases}$

On en déduit que $x = -y - z$ Il existe donc une infinité de solutions sous la forme $(-y-z, y, z)$ dépendant des paramètres y et z. Deux solutions particulières sont $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$.

Pour $\lambda = 6$, on a le système $\begin{cases} 2x+2y+2z = 6x \\ 2x+2y+2z = 6y \\ 2x+2y+2z = 6z \end{cases}$ ou encore

$$\begin{cases} -4x+2y+2z = 0\ldots(1) \\ 2x-4y+2z = 0\ldots(2) \\ 2x+2y-4z = 0\ldots(3) \end{cases}$$

En prenant $(1)-(2)$ on obtient $-6x+6y = 0$ et donc $x = y$. Simlairement, en prenant $(1)-(3)$ on obtient $x = z$ et $(2)-(3)$ on obtient $y = z$. Il existe donc une infinité de solutions sous la forme (x, x, x). Une solution particulière est $(1, 1, 1)$.

Exercice 10. (a) Calculons

$$D = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Alors,

$$\begin{aligned} D &= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} + 0 \\ &= (3-\lambda)((3-\lambda)^2-1) - ((3-\lambda)-0) = (3-\lambda)((3-\lambda)^2-2) = 0 \end{aligned}$$

Nous avons $(3-\lambda)((3-\lambda)^2-2) = 0$ quand $3-\lambda = 0$, c'est-à-dire quand $\lambda = 3$, ou bien quand $(3-\lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$, c'est-à-dire quand $\lambda = 3 \pm \sqrt{2}$.

(b) Pour $\lambda = 3$, le système devient $\begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Nous avons une infinité de solutions donné par $(-z, 0, z)$ dépendant du paramètre z.

Pour $\lambda = 3 \pm \sqrt{2}$, le système devient $\begin{cases} y = \pm\sqrt{2}x \\ x+z = \pm\sqrt{y} \\ y = \pm\sqrt{2}z \end{cases}$

Nous avons une infinité de solutions donné par $(z, \pm\sqrt{2}z, z)$ dépendant du paramètre z.

Révisions et approfondissement

Exercice 11. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-2A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -8 \\ -8 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$x+y$ n'est pas possible (les tailles des matrices sont différente)

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 12 \\ -9 & -11 & -20 \\ 1 & 2 & 18 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -10 & -18 & -16 \\ -2 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

xA n'est pas possible (le nombre de colonnes de x est différent du nombre de lignes de A)

By n'est pas possible (le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de y)

$$yB = (-4, 5, 6)$$

Exercice 12 D'abord on calcul B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

nous

$$B^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ 0. & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

On a

$$BB^t = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta + 0 & \cos\theta\sin\theta\cos\varphi - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi + 0 & \cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + 0 \\ \sin\theta\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta\cos\theta\cos\varphi + 0 & \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi & \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi\cos\theta - \sin\theta\sin\varphi\cos\theta + 0 & \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

ou encore

$$BB^t = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - \sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

et donc

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B est également orthogonale.

Exercice 13.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = 1 \times 6 \times 10 \times 13 \times 15.$$

Exercice 14.
Soit $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$ (*nombre d'or*) et $c = 1/\sqrt{2(\varphi+2)}$.
(a) Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \alpha + \varphi\beta, \lambda_2 = \alpha + (\varphi - 1)\beta, \lambda_3 = \alpha - (\varphi - 1)\beta$ et $\lambda_4 = \alpha - \varphi\beta$
(b) Les vecteurs propres orthonormales sont :

$$x_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \\ \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = c\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \\ -1 \\ -\varphi \end{pmatrix}, x_3 = c\begin{pmatrix} \varphi \\ -1 \\ -1 \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ et } x_4 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \\ \varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$