UE HAI715I - Treillis

Notes de cours et exercices

Faculté des sciences, Université de Montpellier

Treillis

Les treillis sont des ensembles ordonnés qui vérifient une propriété de structure esquissée ci-dessous et qui va être développée ensuite plus formellement.

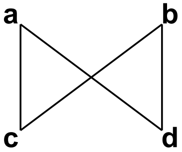


Diagramme de Hasse
d'un ordre partiel
qui n'est pas un treillis.

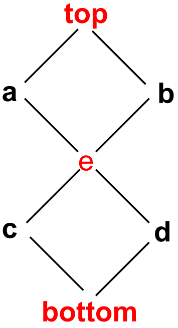


Diagramme de Hasse
d'un ordre partiel
qui est un treillis.

Treillis

En représentation des connaissances, dans une ontologie par exemple, cela oblige à expliciter plus de combinaisons de concepts.

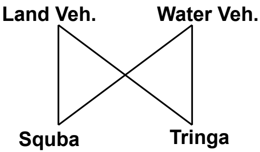
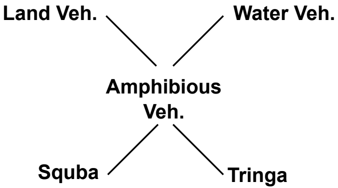


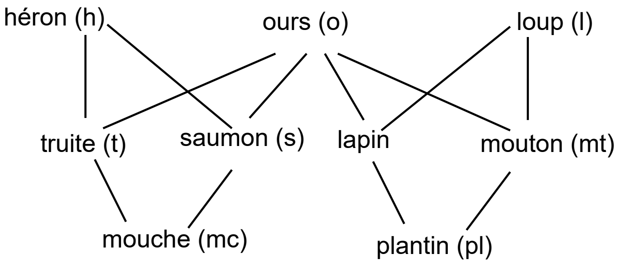
Diagramme de Hasse
d'un ordre partiel
qui n'est pas un treillis.



Partie centrale du
diagramme de Hasse
d'un ordre partiel
qui est un treillis.
Le top et bottom ne sont pas
montrés.

Minorant

Pour un ensemble ordonné $P = (X, \leq_X)$ et une partie $Y \subseteq X$, un minorant de Y est un élément $m \in X$ qui vérifie $\forall y \in Y, m \leq_X y$

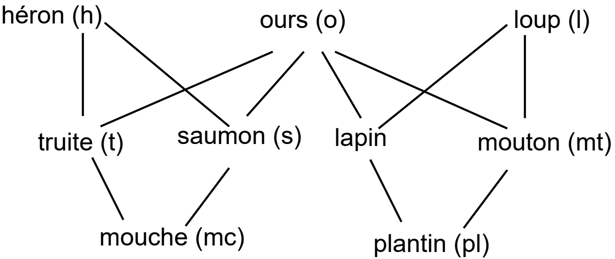


$$Minorants(\{h, o\}) = \{t, s, mc\}$$
$$Minorants(\{t, s\}) = \{mc\}$$

Calculer : $Minorants(\{o\})$, $Minorants(\{o, l\})$, $Minorants(\{o, mt\})$

Borne inférieure (infimum)

Pour un ensemble ordonné $P = (X, \leq_X)$ et une partie $Y \subseteq X$, si l'ensemble des minorants admet un unique plus grand élément, celui-ci est la borne inférieure, ou infimum, de Y



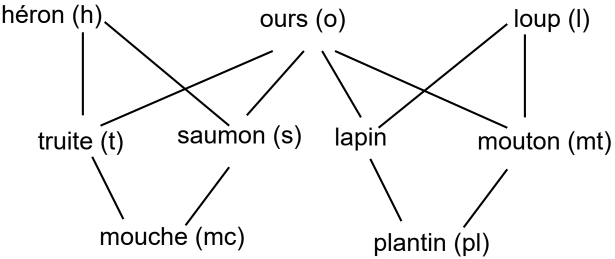
$Minorants(\{h, o\}) = \{t, s, mc\}$. t et s sont tous deux des éléments plus grands que tous les autres dans$\{t, s, mc\}$. $\{h, o\}$ n'admet pas de borne inférieure.

$Minorants(\{t, s\}) = \{mc\}$. mc est l'unique élément, c'est aussi le plus grand de $\{mc\}$. $\{t, s\}$ admet mc comme borne inférieure.

Admettent-ils une borne inférieure : $\{o\}$, $\{o, l\}$, $\{o, mt\}$

Majorant

Pour un ensemble ordonné $P = (X, \leq_X)$ et une partie $Y \subseteq X$, un majorant de Y est un élément $m \in X$ qui vérifie $\forall y \in Y, y \leq_X m$

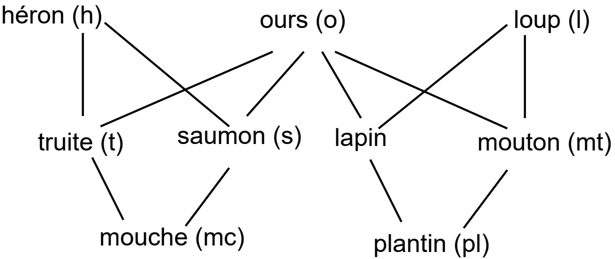


$$Majorants(\{h, o\}) = \emptyset$$
$$Majorants(\{t, s\}) = \{h, o\}$$
$$Majorants(\{s, lapin\}) = \{o\}$$

Calculer : $Majorants(\{s, pl\})$, $Majorants(\{lapin, mt\})$, $Majorants(\{pl\})$

Borne supérieure (supremum)

Pour un ensemble ordonné $P = (X, \leq_X)$ et une partie $Y \subseteq X$, si l'ensemble des majorants admet un unique plus petit élément, celui-ci est la borne supérieure, ou supremum, de Y



$Majorants(\{h, o\}) = \emptyset$. Il n'y a pas de supremum.
$Majorants(\{t, s\}) = \{h, o\}$.
Il n'y a pas de supremum car ces deux sommets sont incomparables.
$Majorants(\{s, lapin\}) = \{o\}$. o est un supremum pour $\{s, lapin\}$.

Admettent-ils une borne supérieure : $Majorants(\{s, pl\})$, $Majorants(\{lapin, mt\})$, $Majorants(\{pl\})$

Un ensemble ordonné $P = (X, \leq_X)$ est :

- un inf-demi treillis si toute partie $Y \subseteq X$ admet une borne inférieure.
- un sup-demi treillis si toute partie $Y \subseteq X$ admet une borne supérieure.
- un treillis si c'est un inf-demi treillis et un sup-demi treillis.

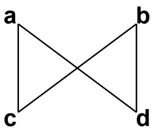


Diagramme de Hasse
d'un ordre partiel
qui n'est pas un treillis.

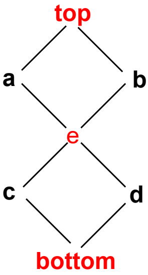
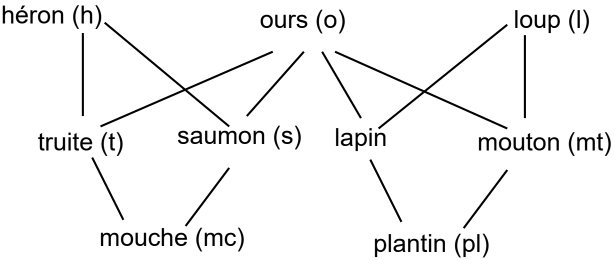


Diagramme de Hasse
d'un ordre partiel
qui est un treillis.

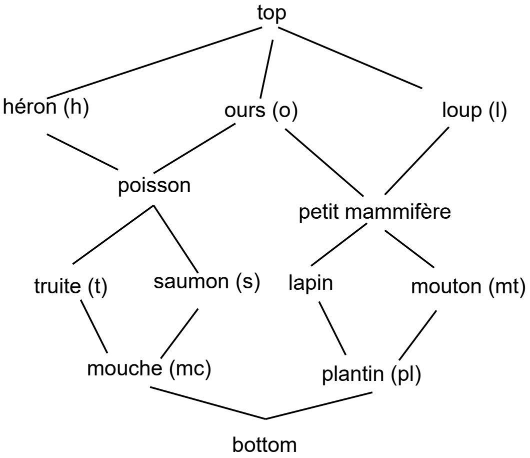
Treillis

L'ordre partiel sur les animaux n'est pas un treillis.



Complétion d'un ordre en treillis

L'ordre partiel sur les animaux n'est pas un treillis,
mais on peut le compléter pour le transformer en treillis.



Complétion d'un ordre en treillis : solution 1

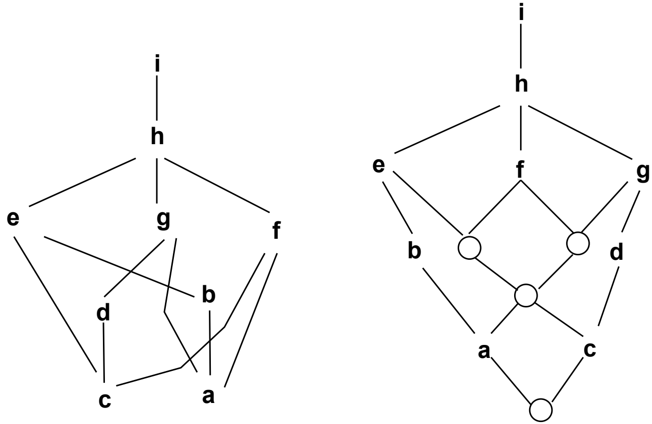
Il existe souvent plusieurs complétions d'un ordre en treillis.

$Minorants(\{e, f, g\}) = \{a, c\}$

On peut tout d'abord considérer de donner un infimum à $\{e, f\}$, et à $\{f, g\}$

Puis un infimum aux deux sommets ajoutés.

On doit aussi ajouter un infimum à $\{a, c\}$



Complétion d'un ordre en treillis : solution 2

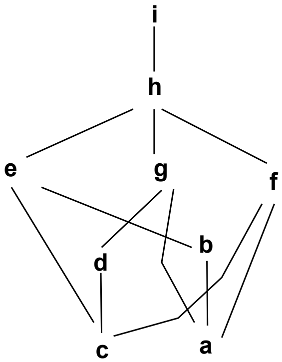
$Minorants(\{e, f, g\}) = \{a, c\}$

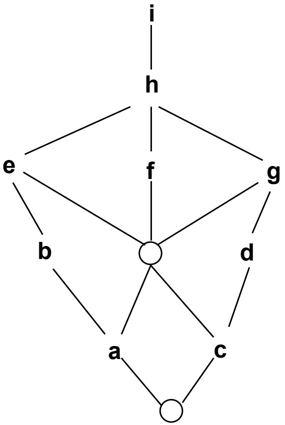
On peut donner directement un infimum à $\{e, f, g\}$

On doit toujours ajouter un infimum à $\{a, c\}$

On ne peut pas compléter l'ordre pour en faire un treillis avec moins de sommets

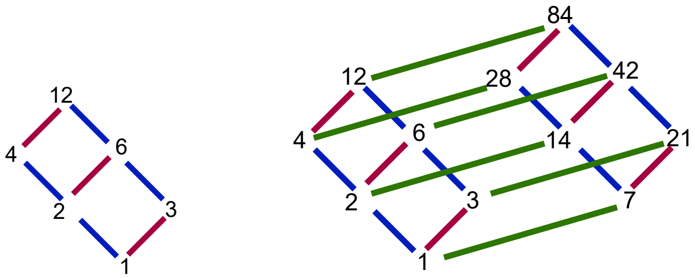
C'est le complété de Dedekind MacNeille





Un exemple de treillis particulier : le treillis des diviseurs d'un nombre

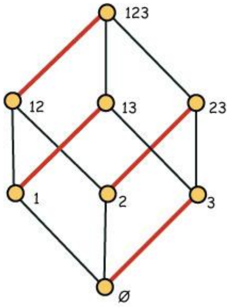
Source : http://pierreaudibert.fr/tra/treillis.pdf
Le treillis des diviseurs d'un nombre ordonné par l'ordre de divisibilité.
Infimum : PGCD (plus grand commun diviseur).
Supremum : PPCM (plus petit commun multiple)
Le treillis des diviseurs de 84 (à droite) est le produit du treillis des diviseurs de 12 (montré à gauche) par le treillis des diviseurs de 7 (puis on applique la multiplication sur les couples). On peut mettre ceci en relation avec la décomposition des nombres en puissances de nombres premiers : $12 = 2^2 * 3 \quad 84 = 2^2 * 3 * 7 = 12 * 7$

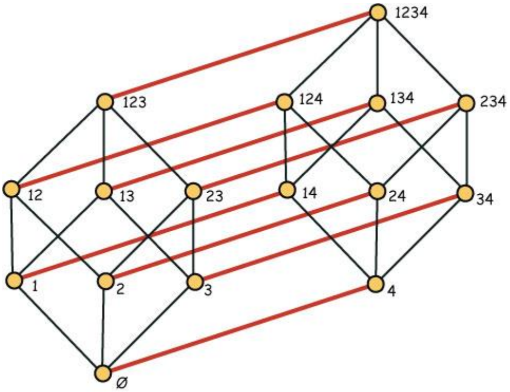


Exercice : Choisissez un nombre entre 10 et 50 et construisez le treillis de ses diviseurs

Un exemple de treillis particulier : le treillis des parties d'un ensemble

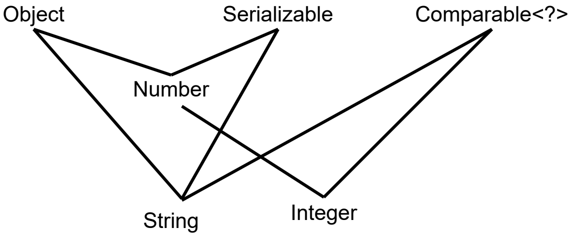
Le treillis des parties d'un ensemble ordonné par l'ordre d'inclusion.
Infimum : intersection
Supremum : union
Le treillis des parties de $\{1, 2, 3, 4\}$ (à droite) est le produit du treillis des parties de $\{1, 2, 3\}$ (montré à gauche) par le treillis des parties de $\{4\}$ (puis on applique l'union sur les couples)





Exercice

Expliquer pourquoi l'ordre suivant tiré de la hiérarchie des classes et interfaces Java n'est pas un treillis. Puis trouver une manière de le compléter pour en faire un treillis.



Exercice

Expliquer pourquoi l'ordre suivant tiré de la hiérarchie des collections Java n'est pas un treillis. Puis le compléter pour en faire un treillis.