Importance de la notion d’ordre

- Rangement, classification, ordonnancement
- Quelques exemples
  - Biologie : classification de plantes ou d’animaux
  - Sciences humaines et sociales : domination d’un individu par un autre
  - Recherche opérationnelle : ordonnancement entre tâches
  - Génie logiciel : hiérarchie d’héritage dans un langage de programmation par objets

Première partie : Ordres et treillis

Notions abordées parmi :

- relations et leurs propriétés, ensembles ordonnés, morphismes, isomorphismes
- chaînes, anti-chaînes, extensions, extensions linéaires
- ordres particuliers (exemple de cette année : ordres produits)
- treillis et leurs éléments particuliers
- correspondance de Galois et treillis de Galois, réduction au cas des relations binaires (analyse formelle de concepts)

Applications possibles en génie logiciel

- donner une sémantique mathématique à certains diagrammes UML
- relation d'héritage
- relation d'instanciation
- relation de sous-typage
- structuration des classes par leur contenu (attributs, méthodes)

Relation binaire entre deux ensembles

Définition

Soient deux ensembles E et F,
une relation binaire R est une partie du produit cartésien $E \times F$
On note $R \subseteq E \times F$
Il s'agit aussi d'un ensemble de couples (e, f) avec $e \in E$ et $f \in F$.
On écrira $(e, f) \in R$ ou eRf.

Exemple (1. Associer une ville à un pays dont elle est la capitale)

$E_v = \{Paris, Berlin, Rome, Montpellier\}$
$F_p = \{Allemagne, France, Italie, Espagne\}$
$R_{vp} = \{(Paris, France), (Berlin, Allemagne), (Rome, Italie)\}$

Exemple (2. Associer une variété de fleur à une couleur qu'elle peut avoir)

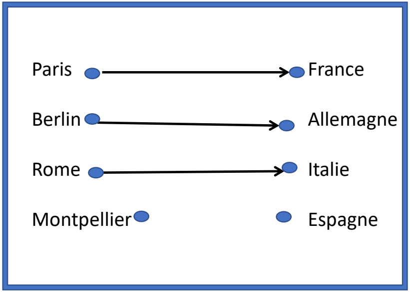
$E_f = \{jasmin, muguet, petunia\}$
$F_c = \{blanc, jaune, rouge, rose, violet, vert\}$
$R_{fc} = \{(jasmin, blanc), (jasmin, jaune), (muguet, blanc), (petunia, blanc),$
$(petunia, rouge), (petunia, rose), (petunia, violet)\}$

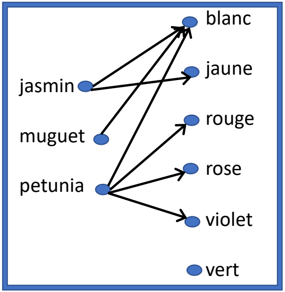
Représentation d'une relation binaire pour $E \neq F$ par un graphe

Définition

À une relation binaire $R \subseteq E \times F$, $E \neq F$, on associe un graphe orienté $G = (E \cup F, R)$.
Ses sommets sont les éléments de E et les éléments de F.
Ses arcs sont les couples de la relation R.

Exemple (Graphes associés aux relations R_{vp} (gauche) et R_{fc} (droite))





Relation binaire sur un ensemble

Définition

Soit un ensemble E, une relation binaire R sur E est une partie du produit cartésien $E \times E$.
On note $R \subseteq E \times E$.
Il s'agit aussi d'un ensemble de couples (e_1, e_2) avec $e_1 \in E$ et $e_2 \in E$.
On écrira $(e_1, e_2) \in R$ ou $e_1 R e_2$.

Exemple (Relation binaire sur un ensemble)

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$R = \{(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_5), (e_5, e_4)\}$

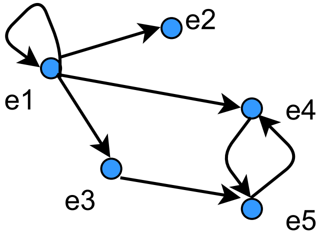
Représentation d'une relation binaire sur un ensemble par un graphe

Définition

À une relation binaire sur E, $R \subseteq E \times E$, on associe un graphe orienté $G = (E, R)$. Ses sommets sont les éléments de E.
Ses arcs sont les couples de la relation R.

Exemple (Relation binaire sur un ensemble)

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$R = \{(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_5), (e_5, e_4)\}$

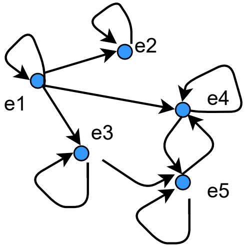
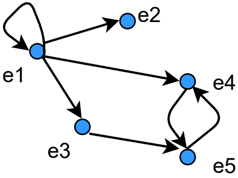


Relation réflexive

Définition

Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est réflexive si :
$\forall e \in E, (e, e) \in R$ *(que l'on note aussi eRe)*

Exemple

Une relation réflexive	*Une relation non réflexive*
	

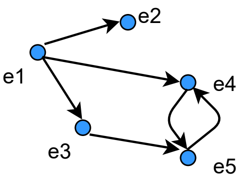
Relation irréflexive

Définition

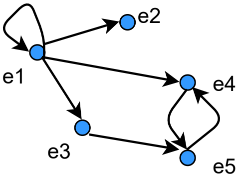
Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est irréflexive si : $\forall e \in E$, $(e, e) \notin R$

Exemple

Une relation irréflexive



Une relation non irréflexive

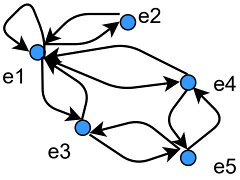
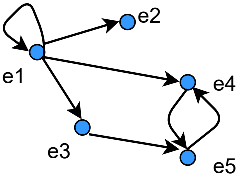


Relation symétrique

Définition

Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est symétrique si :
$\forall e_1, e_2 \in E$, *si* $(e_1, e_2) \in R$, *alors* $(e_2, e_1) \in R$

Exemple

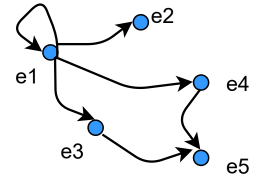
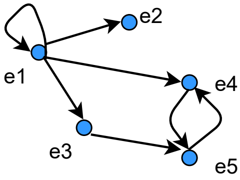
Une relation symétrique	*Une relation non symétrique*
	

Relation antisymétrique

Définition

Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est anti-symétrique si :
$\forall e_1, e_2 \in E$, *si* $(e_1, e_2) \in R$ *et* $(e_2, e_1) \in R$, *alors* $e_2 = e_1$

Exemple

Une relation antisymétrique	*Une relation non antisymétrique*
	

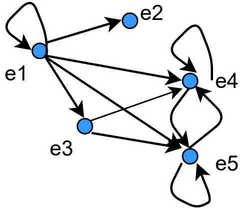
Relation transitive

Définition

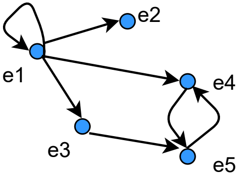
Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est une relation transitive si
$\forall e_1, e_2, e_3 \in E,\ e_1 R e_2 \text{ et } e_2 R e_3 \implies e_1 R e_3$

Exemple

Une relation transitive



Une relation non transitive



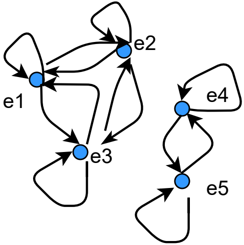
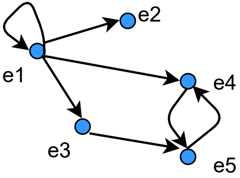
Relation d'équivalence

Définition

Soient un ensemble E une relation binaire R sur E, R est une relation d'équivalence si :

- *réflexive*
- *symétrique*
- *transitive*

Exemple

Une relation d'équivalence	*Une relation qui n'est pas une relation d'équivalence*
	

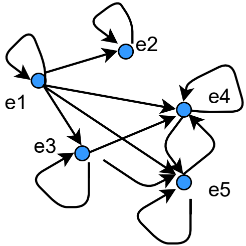
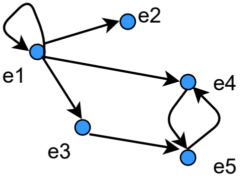
Préordre

Définition

Soient un ensemble E une relation binaire R sur E est un pré-ordre si :

- *réflexive*
- *transitive*

Exemple

Un pré-ordre	*Une relation qui n'est pas un préordre*
	

Ordre

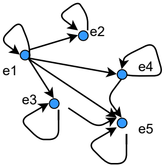
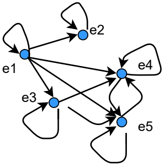
Définition

Soient un ensemble E une relation binaire R (notée $\leq$) sur E est un ordre si elle est :

- *réflexive*
- *antisymétrique*
- *transitive*

$(E, \leq)$ *est appelé un ensemble ordonné. On écrit* $x \leq y$ *plutôt que* $(x, y) \in \leq$.

Exemple

Un ordre	*Une relation qui n'est pas un ordre*
	
$e_1 \leq e_1,\ e_1 \leq e_2,\ e_1 \leq e_5$	

Vocabulaire

- y couvre x si $x \neq y$, $y \geq x$ et $\forall z$, si $y \geq z$ et $z \geq x$, on a $x = z$ ou $y = z$
- x est un minorant de y si $x \leq y$ (resp. majorant si $y \leq x$)
- x et y sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$
- x et y sont incomparables si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$ (notation $x || y$)

Exemple

e_2 majore et couvre e_1, e_5 majore mais ne couvre pas e_1, e_2 et e_4 sont incomparables

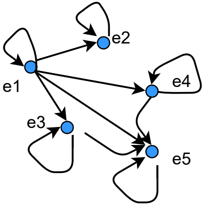


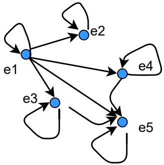
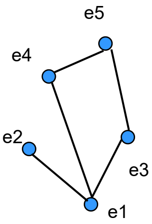
Diagramme de Hasse

Définition

Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$ *son diagramme de Hasse est une représentation graphique de sa relation de couverture telle que chaque élément* x *de* E *est représenté par un point* $p(x)$ *du plan avec :*

- *si* $x \leq y$*, la droite horizontale passant par* $p(x)$ *est au-dessous de la droite horizontale passant par* $p(y)$*.*
- *lorsque* y *couvre* x*, un segment de droite joint* $p(x)$ *et* $p(y)$*.*

Exemple

Un ordre	*Son diagramme de Hasse*
	

Relation d'ordre strict

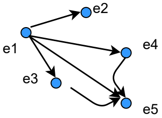
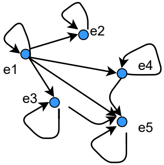
Définition

Soit un ensemble E, une relation binaire R sur E est une relation d'ordre strict (notée $<$) si elle est :

- *irréflexive*
- *transitive*

Elle est alors asymétrique : quand xRy, on n'a pas yRx.

Exemple

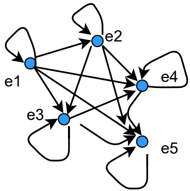
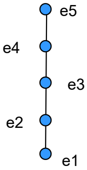
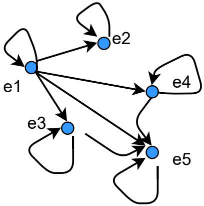
Un ordre strict	*Une relation qui n'est pas un ordre strict*
	

Relation d'ordre total

Définition

Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$, $\leq$ *est un ordre total si* $\forall x, y \in E$ *on a*
$x \nleq y \implies y \leq x$

Exemple

Un ordre total et son diagramme de Hasse	*Un ordre qui n'est pas total*
 	

Morphisme entre relations binaires sur un ensemble E

Definition (Morphisme entre relations binaires sur un ensemble E)

Si R_p et R_q sont deux relations binaires sur E, un morphisme de R_p vers R_q est une application m de E vers E vérifiant : $\forall x, y \in E,\ xR_py \implies m(x)R_qm(y)$.
Un morphisme préserve les couples et peut en ajouter.

Isomorphismes et types d'ordre, Morphismes

Définition (morphisme d'ordre)

Soient deux ensembles ordonnés $P = (E_P, \leq_P)$ et $Q = (E_Q, \leq_Q)$, un morphisme d'ordre est une application a de E_P vers E_Q vérifiant : $\forall x, y \in E_P,\ x \leq_P y \implies a(x) \leq_Q a(y)$.

a préserve l'ordre $\leq_P$.

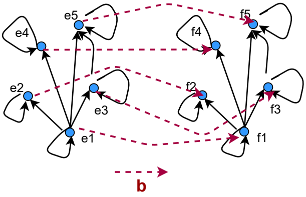
Définition (isomorphisme d'ordre)

Deux ensembles ordonnés $P = (E_P, \leq_P)$ et $Q = (E_Q, \leq_Q)$ sont isomorphes (on dira aussi qu'ils sont du même type) lorsqu'il existe une bijection b de E_P and E_Q vérifiant : $\forall x, y \in E_P,\ x \leq_P y \Leftrightarrow b(x) \leq_Q b(y)$.

b est un isomorphisme d'ordre ; elle préserve l'ordre $\leq_P$ et sa réciproque b^{-1} préserve l'ordre $\leq_Q$.

Exemple

Un isomorphisme d'ordre



Un morphisme d'ordre qui n'est pas un isomophisme