

TD 2 : Modèle Linéaire Simple

2024-2025

Exercice 1 :

On observe l'évolution de la population (en millions d'habitants) et le produit intérieur brut (PIB en millions d'euros) entre 2014 et 2023. On note X la population et Y le PIB. L'objectif est de déterminer dans quelle mesure la population impacte la croissance économique, en cherchant à expliquer l'évolution du PIB par la démographie.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

les hypothèses du modèle sont les suivantes :

- $E(\varepsilon_t) = 0$, pour tout $t \in [1, n]$
- $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0$ si $t \neq t'$ pour tout $t, t' \in [1, n]$
- $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = \sigma_\varepsilon^2$ si $t = t'$

On observe les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{10} X_t &= 159,0733 & \sum_{t=1}^{10} Y_t &= 6\,633,360725 & \sum_{t=1}^{10} X_t Y_t &= 104\,626,123 \\ \sum_{t=1}^{10} X_t^2 &= 2\,552,0647 & \sum_{t=1}^{10} Y_t^2 &= 4\,442\,610,21 & \sum_{t=1}^{10} (e_{t+1} - e_t)^2 &= 5\,465,51865 \\ \sum_{t=1}^{10} \hat{Y}_t^2 &= 4\,436\,998,14 & \sum_{t=1}^{10} \hat{Y}_t Y_t &= 4\,436\,999,54 & & \end{aligned}$$

1. Calculer les estimateurs des moindres carrés ordinaires.
2. Calculer l'estimateur de la variance de l'erreur. Construire l'intervalle de confiance au risque de 5% pour la variance de l'erreur. Tester $\sigma_\varepsilon^2 = 720$.
3. Le coefficient β est-il significativement différent de zéro ?
4. Construire l'intervalle de confiance au risque de 5% pour ce même coefficient.
5. Nous nous intéressons maintenant au paramètre α . Construire l'intervalle de confiance au risque de 5% et tester sa signification.
6. Construire le tableau de l'analyse de la variance.
7. Calculer le coefficient de corrélation linéaire et tester sa signification.

8. En 2024, on prévoit respectivement 19 (en millions d'habitants) pour la population. Déterminer la valeur prévue du PIB ainsi que l'intervalle de prévision au risque de 5%. Tester le modèle si on prévoit une valeur de 625,5 pour le PIB.