

TD 1 : Modèle Linéaire Simple 2024-2025

Exercice 1 :

On souhaite savoir s'il existe une relation entre les subventions accordées aux petites exploitations agricoles et leur niveau de production. Une étude a été réalisée sur 10 ans, où chaque année le montant des subventions versées par l'État et le volume total de production agricole (en tonnes) des exploitations ont été enregistrés. L'objectif est de déterminer si les subventions ont un effet significatif sur la productivité des exploitations agricoles

- Y_t : Volume de production agricole (en tonnes) au cours de l'année t
- X_t : Montant des subventions (en milliers d'euros) versées aux exploitations au cours de l'année t

Les données sont présentées dans le tableau suivant :

Année	Production (Y_t)	Subventions (X_t)
2014	200	170
2015	175	160
2016	170	160
2017	160	150
2018	161	151
2019	173	190
2020	152	170
2021	150	155
2022	149	130
2023	130	125

Dans vos calculs vous travaillerez avec tous les chiffres après la virgule.

Pour savoir s'il existe une relation entre ces deux variables, vous étudierez le modèle suivant :

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

Avec : $E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t \in \{2014; \dots; 2023\}$.

$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = \sigma^2_\varepsilon \quad \forall t = t'$ sinon $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) = 0$.

1. Dresser le graphique de covariance entre Y_t et X_t .
2. Estimer par les moindres carrés ordinaires (MCO) les paramètres α et β du modèle.
3. Représenter graphiquement le résultat sur le graphique de régression.
4. On s'intéresse à l'analyse du modèle suivant : $X_t = \alpha' + \beta' Y_t + \varepsilon_t$. Estimer par les MCO les nouveaux paramètres α' et β' .
5. Construire l'intervalle de confiance bilatéral symétrique de α et β et σ^2_ε (avec un risque d'erreur de 5%).
6. Tester la signification des paramètres du modèle initial (i.e. $\alpha = 0$ et $\beta = 0$).
7. Tester l'hypothèse $\sigma^2_\varepsilon = 250$.
8. Dresser le tableau de l'analyse de la variance.
9. Calculer le coefficient de détermination R^2 et tester sa signification.
10. Si on prévoit que le montant des subventions en 2024 sera de 110 (en milliers d'euros), donner un intervalle de confiance à 95% de la production moyenne en 2024. Si on prévoit une valeur de 80 pour celle-ci le modèle est-il acceptable au vu de la prévision ?