**Examen Session 1**
**“Algèbre 1 - HAX708X”**

**4 mars 2024**

*Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.*

*Durée : 3h00*

**Questions isolées** *(7 points)*

**a.** Est-ce que $\mathbb{Z}[X]$ possède un idéal qui n'est pas un $\mathbb{Z}[X]$-module libre ?

**b.** À $X \in M_n(\mathbb{Z})$, on associe le sous-module $\mathrm{Im}(X) = X(\mathbb{Z}^n)$ de $\mathbb{Z}^n$. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$, montrer l'équivalence : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que $A = BP$.

**c.** Déterminer la torsion du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

**d.** Etablir la liste des classes de conjugaison du groupe alterné $\mathfrak{S}_5$ : on calculera le cardinal de chacune d'entre elle.

**e.** Soit $V$ une représentation irréductible complexe d'un groupe *abélien fini* $G$. Montrer que $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$.

**Exercice 1** *(5 points)*

Déterminer une base de chaque $\mathbb{Z}$-module :

(1) $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, x - y + z \in 4\mathbb{Z}\}$.

(2) $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, 3x + y + 8z \in 10\mathbb{Z}\}$.

(3) $M \cap N$.

**Exercice 2** *(5 points)*

On considère un nombre premier $p \geq 2$ et le corps $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit

$$\phi_p : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{F}_p[X],$$

le morphisme d'anneaux canonique.

(1) Pour $n \geq 1$, décrire l'ensemble $I_{p,n} \subset \mathbb{Z}[X]$ formé des polynômes $Q$ de degré $n$ vérifiant $\phi_p(Q) = \lambda X^n$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_p - \{0\}$.

(2) Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme primitif de degré $n$ : $pgcd(a_0, \ldots, a_n) = 1$. Montrer que $Q$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si $Q \in I_{p,n}$ et si de plus $p^2$ ne divise pas $a_0$.

(3) Montrer que $8X^4 + 15X^2 + 45$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

**Exercice 3** *(5 points)*

On considère un groupe fini $G$. On note $Z(G)$ son centre et $|G|$ son cardinal.

(1) Montrer que pour toute représentation irréductible $\rho : G \to GL(V)$, il existe un morphisme de groupe $\lambda : Z(G) \to \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $\rho(g) = \lambda(g) Id_V$, $\forall g \in Z(G)$.

(2) Considérons un élément $g_o \in G$ tel que pour toute representation irréductible $\rho : G \to GL(V)$, l'endomorphisme $\rho(g_o)$ est une homothétie. Montrer que $g_o \in Z(G)$. *On utilisera la représentation régulière de $G$.*

(3) Soient $\chi_1, \cdots, \chi_r$ les caractères des représentations irréductibles complexes de $G$. Montrer que

$$Z(G) = \Big\{ g \in G,\ \sum_{j=1}^{r} \chi_j(g)\overline{\chi_j(g)} = |G| \Big\}.$$