Examen Session 2
"Algèbre 1 - HAX708X"

---

31 mars 2023

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 3h00

Questions isolées *(8 points)*

a. On considère l'idéal $I \subset \mathbb{Z}[X]$ engendré par $2X$ et 9. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/I$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

b. Soient $a, b \geq 1$: on note $a \wedge b$ leur pgcd. Montrer que le groupe $\hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/a\wedge b\mathbb{Z}$.

c. Décrire les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.

d. Soit V une représentation complexe d'un groupe fini G, et χ_V son caractère. Montrer que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, $\forall g \in G$.

Exercice 1 *(5 points)*

On considère le morphisme de groupe $\varphi : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ défini par $\varphi(x, y, z) = (x + y + z, 3x - 2y + 7z)$. On note M l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\varphi(x, y, z) \in 18\mathbb{Z} \times 24\mathbb{Z}$.

(1) Déterminer $v_1 \in \mathbb{Z}^3$ tel que $\varphi(v_1) = (0, 1)$. En déduire $v_2 \in \mathbb{Z}^3$ vérifiant $\varphi(v_2) = (1, 0)$.

(2) Déterminer une base de $\ker(\varphi)$.

(3) Montrer que M est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 3, en donner une base.

(4) Déterminer les facteurs invariants du quotient $\mathbb{Z}^3/M$.

Exercice 2 *(5 points)*

On pose $A = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$.

(1) Déterminer les éléments inversibles de A.

(2) Déterminer tous les idéaux principaux de A.

(3) Déterminer tous les idéaux de A.

Exercice 3 *(4 points)*

On considère une base de $\mathbb{C}^6$ notée $(e_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}_3}$. On considère la représentation $\rho : \mathcal{S}_3 \to GL_6(\mathbb{C})$ du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ définie par

$$\forall \tau \in \mathcal{S}_3, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_3, \qquad \rho(\sigma)(e_\tau) = e_{\sigma\tau\sigma^{-1}}.$$

(1) Décrire les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$.

(2) Déterminer la table des caractères irréductibles du groupe $\mathcal{S}_3$.

(3) Décomposer ρ en somme directe de représentations irréductibles.