EXAMEN SESSION 1
"ALGÈBRE 1 - HAX708X"

3 JANVIER 2023

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 3h00

Questions isolées *(6 points)*

a. Soit A un anneau commutatif. Démontrer que les A-modules simples sont les modules isomorphes à A/I, où I est un idéal maximal de A. (Montrer en particulier que ces A-modules sont deux à deux non isomorphes.)

b. Soit I le noyau de l'homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{C}[X, Y]$ dans $\mathbb{C}$ donné par $P(X, Y) \mapsto P(0, 0)$. Montrer que I n'est pas un idéal principal.

c. Soit V un sous $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^n$ et soit $M := V \cap \mathbb{Z}^n$. Montrer que M est un $\mathbb{Z}$-module libre tel que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ soit isomorphe à V.

d. À isomorphisme près, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 100 ? En donner la liste.

Exercice 1 *(6 points)*

L'anneau $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n], n \geq 2$, est muni de l'action naturelle du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ par permutation des variables. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est antisymétrique si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $\sigma(P) = \epsilon(\sigma)P$, où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ. Soit

$$\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j).$$

(1) Montrer qu'un polynôme $P(X_1, \ldots, X_n)$ est antisymétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on a $P(\ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots) = -P(\ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots)$.

(2) Montrer que Δ_n est antisymétrique. *On pourra procéder par récurrence sur n.*

(3) Pour $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et $R \in \mathbb{C}[X_2, \ldots, X_n]$ uniques, tels que $P = Q \cdot (X_1 - X_2) + R$.

(4) Supposons que $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ soit antisymétrique.

— Montrer que le polynôme R ci-dessus est égal à 0.
— En déduire que $P = \Delta_n \cdot S$ où S est un polynôme symétrique de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$.

Exercice 2 *(4 points)*

Soit A l'ensemble des nombres rationnels qui s'écrivent comme une fraction $\frac{a}{b}$ avec b impair.

(1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

(2) Déterminer ses éléments inversibles ainsi que ses éléments irréductibles.

(3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n x \in A$.

(4) Montrer que A est un anneau principal.

Exercice 3 *(4 points)*

Soit G un groupe fini et $\mathbb{C}[G]$ son algèbre de groupe.

(1) Expliquer le fait d'une représentation linéaire complexe de G est exactement un $\mathbb{C}[G]$-module.

(2) Montrer que le centre de $\mathbb{C}[G]$ est l'espace vectoriel engendré par les $\phi_C := \sum_{x \in C} \delta_x$, où C est une classe de conjugaison de G.

(3) Montrer que si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation irréductible, alors $\rho(\phi_C) := \sum_{x \in C} \rho(x)$ est une homothétie.

Exercice 4 *(4 points)*

On considère une base de $\mathbb{C}^6$ notée $(e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_3}$. On considère la représentation $\rho : \mathcal{S}_3 \to GL_6(\mathbb{C})$ du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ définie par

$$\forall \tau \in \mathcal{S}_3, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_3, \qquad \rho(\sigma)(e_\tau) = e_{\sigma \tau \sigma^{-1}}.$$

(1) Décrire les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$.

(2) Déterminer la table des caractères irréductibles du groupe $\mathcal{S}_3$.

(3) Décomposer ρ en somme directe de représentations irréductibles.