Correction du Contrôle Continu 2
"Algèbre 1 - HAX708X"

—

Décembre 2022

Questions isolées *(6 points)*

a. Déterminer une base du $\mathbb{Z}$-module $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, 8x + 6y - 14z \in 5\mathbb{Z}\}$.

Comme 2 et 5 sont premiers entre eux, $(x, y, z) \in M$ ssi $\varphi(x, y, z) = 4x + 3y - 7z \in 5\mathbb{Z}$. Posons $v_3 = (1, -1, 0)$: comme $\varphi(v_3) = 1$, on a la décomposition $\mathbb{Z}^3 = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{Z}v_3$. On voit alors que $M = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{Z}5v_3$. Maintenant, il nous suffit d'exhiber une base du $\mathbb{Z}$-module $\ker(\varphi)$. Considérons $v_2 = (1, 1, 1) \in \ker(\varphi)$. Si $v = (x, y, z) \in \ker(\varphi)$, alors $v - zv_2 = (x - z, y - z, 0) \in \ker(\varphi)$ et cette dernière condition est équivalente à : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $y - z = 4k$ et $x - z = -3k$, c'est à dire $v - zv_2 = kv_3$, avec $v_1 = (-3, 4, 0)$. On a donc montré que (v_1, v_2) est une base de $\ker(\varphi)$. Conclusion : (v_1, v_2, v_3) est une vase de M.

b. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module $N := (\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})$.

Le lemme chinois nous assure que

$$N \simeq (\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2^4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_3\mathbb{Z}),$$

avec $d_1 = 5$, $d_2 = 2^2 \cdot 5$ et $d_3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Comme $d_1 \backslash d_2 \backslash d_3$, les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module N sont d_1, d_2, d_3.

c. Soit M un $\mathbb{Z}$-module. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est sans torsion.

Soit $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Le morphisme $\psi_k : v \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \mapsto kv \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ admet une application réciproque $\psi_k^{-1} : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ définie par la relation $\psi_k^{-1}(m \otimes x) = m \otimes \frac{x}{k}$. Cela permet de voir que $kv = 0$ ssi $v = 0$. On a donc montré que le $\mathbb{Z}$-module $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est sans torsion.

Exercice 1 *(6 points)*

d. On considère le groupe diédral D_{12} d'ordre 12 : il est engendré par deux élements r, s satisfaisant les relations $r^6 = 1$, $s^2 = 1$ et $srs = r^{-1}$.

(1) Expliciter le groupe dérivé de D_{12}.

(2) Déterminer les classes de conjugaison de D_{12}.

(3) Établir la table des caratères de D_{12}.

Cet exercice a été traité en TD, pour tous les groupes diédraux.

Exercice 2 *(6 points)*

On considère deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels E et F de dimension fini. Soient $\phi \in \mathrm{End}(E)$ et $\psi \in \mathrm{End}(F)$.

(1) Montrer qu'il existe une application linéaire $\theta \in \mathrm{End}(E \otimes_{\mathbb{C}} F)$ définie par la relation $\theta(e \otimes f) = \phi(e) \otimes \psi(f)$.

(2) À quelles conditions θ est un isomorphisme ?

(3) Montrer la relation : $\mathrm{rang}(\theta) = \mathrm{rang}(\phi)\,\mathrm{rang}(\psi)$. *On pourra considérer des supplémentaires de* $\ker(\phi)$ *et* $\ker(\psi)$.

Question (1) : L'application $b : E \times F \to E \otimes_{\mathbb{C}} F$ définie par la relation $b(e, f) = \phi(e) \otimes \psi(f)$ est bilinéaire. Elle se factorise donc en un morphisme $\theta : E \otimes_{\mathbb{C}} F \to E \otimes_{\mathbb{C}} F$ de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Question (2) : Si ϕ n'est pas injectif, on a $\theta(e \otimes f) = 0$ pour tout $e \in \ker(\phi)$: cela montre que θ n'est pas injectif (et donc θ n'est pas un isomorphisme). De la même façon, θ n'est pas un isomorphisme si $\ker(\psi) \neq 0$. Réciproquement, si ϕ et ψ sont des isomorphismes, l'application linéaire $\theta \in \mathrm{End}(E \otimes_{\mathbb{C}} F)$ admet un inverse défini par la relation $\theta^{-1}(e \otimes f) = \phi^{-1}(e) \otimes \psi^{-1}(f)$.

Question (3) : Considérons des décompositions en somme directe : $E = \ker(\phi) \oplus E'$ et $F = \ker(\psi) \oplus F'$. Alors

$$E \otimes_{\mathbb{C}} F = E' \otimes_{\mathbb{C}} F' \bigoplus E' \otimes_{\mathbb{C}} \ker(\psi) \bigoplus \ker(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} F' \bigoplus \ker(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} \ker(\psi).$$

On remarque que θ est identiquement nul sur les trois sous-espaces vectoriels : $E' \otimes_{\mathbb{C}} \ker(\psi)$, $\ker(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} F'$ et $\ker(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} \ker(\psi)$. A l'opposé, l'application θ réalise un isomorphisme entre $E' \otimes_{\mathbb{C}} F'$ et $\mathrm{Image}(\phi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Image}(\psi)$. Ainsi le rang de θ est égal à $\dim(E' \otimes_{\mathbb{C}} F') = \dim(E') \dim(F') = \mathrm{rang}(\phi)\, \mathrm{rang}(\psi)$.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe d'un groupe fini. On considère les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_V$ et $\mathcal{A}_V$ de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$ suivants :

$$\mathcal{S}_V = \mathrm{Vect}(v \otimes w + w \otimes v;\ v, w \in V\}, \qquad \mathcal{A}_V = \mathrm{Vect}(v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}.$$

(1) Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V, expliciter des bases respectives de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$, $\mathcal{S}_V$ et $\mathcal{A}_V$.

(2) Montrer que $\mathcal{S}_V$ et $\mathcal{A}_V$ sont deux sous-représentations de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$.

(3) Notons χ_V et χ_S les caractères respectifs des représentations V et $\mathcal{S}_V$. Montrer que

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)\right), \qquad \forall g \in G.$$

On pourra utiliser une base de V qui diagonalise l'endomorphisme $\rho(g)$.

Question (1) : La famille $\mathcal{B} := \{e_i \otimes e_j, 1 \leq i, j \leq n\}$ est une base de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$. Considérons une nouvelle famille de vecteurs $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_s \cup \mathcal{B}_a$ avec

$$\mathcal{B}_a := \{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i, 1 \leq i < j \leq n\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_s := \{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i, 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

On remarque que $\mathcal{B}_a$ et $\mathcal{B}_s$ possèdent respectivement $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ et $\frac{1}{2}(n^2 + n)$ vecteurs : ainsi $\mathcal{B}'$ possède n^2 vecteurs. D'autre part, tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont engendrés par les vecteurs de $\mathcal{B}'$. Cela permet de conclure que $\mathcal{B}'$ est une base de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$. Maintenant on remarque que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_a) = \mathcal{A}_V$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_s) = \mathcal{S}_V$. Ainsi $\mathcal{B}_a$ et $\mathcal{B}_s$ sont des bases respectives de $\mathcal{A}_V$ et $\mathcal{S}_V$.

Question (2) : C'est immédiat à vérifier.

Question (3) : Soient $g \in G$, et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V qui diagonalise l'endomorphisme $\rho(g)$: pour tout i, il existe $\lambda_i \in \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $g \cdot e_i = \lambda_i e_i$. Alors

$$g \cdot \left(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i\right) = \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i), \qquad \forall 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_S(g) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_i \lambda_j \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i \lambda_j + \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i)^2 + \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)\right).
\end{aligned}$$