Contrôle Continu 2
"Algèbre 1 - HAX708X"

13 décembre 2022

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 1h30

Questions isolées *(6 points)*

a. Déterminer une base du $\mathbb{Z}$-module $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, 8x + 6y - 14z \in 5\mathbb{Z}\}$.

b. Déterminer les facteurs invariants du $\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/45\mathbb{Z})$.

c. Soit M un $\mathbb{Z}$-module. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est sans torsion.

Exercice 1 *(6 points)*

d. On considère le groupe diédral D_{12} d'ordre 12 : il est engendré par deux élements r, s satisfaisant les relations $r^6 = 1$, $s^2 = 1$ et $srs = r^{-1}$.

(1) Expliciter le groupe dérivé de D_{12}.
(2) Déterminer les classes de conjugaison de D_{12}.
(3) Établir la table des caratères de D_{12}.

Exercice 2 *(6 points)*

On considère deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels E et F de dimension fini. Soient $\phi \in \mathrm{End}(E)$ et $\psi \in \mathrm{End}(F)$.

(1) Montrer qu'il existe une application linéaire $\theta \in \mathrm{End}(E \otimes_{\mathbb{C}} F)$ définie par la relation $\theta(e \otimes f) = \phi(e) \otimes \psi(f)$.
(2) À quelles conditions θ est un isomorphisme ?
(3) Montrer la relation : $\mathrm{rang}(\theta) = \mathrm{rang}(\phi)\,\mathrm{rang}(\psi)$. *On pourra considérer des supplémentaires de* $\ker(\phi)$ *et* $\ker(\psi)$.

Exercice 3 *(6 points)*

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation complexe d'un groupe fini. On considère les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_V$ et $\mathcal{A}_V$ de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$ suivants :

$$\mathcal{S}_V = \mathrm{Vect}(v \otimes w + w \otimes v;\ v, w \in V\}, \qquad \mathcal{A}_V = \mathrm{Vect}(v \otimes w - w \otimes v;\ v, w \in V\}.$$

(1) Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de V, expliciter des bases respectives de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$, $\mathcal{S}_V$ et $\mathcal{A}_V$.
(2) En déduire que $\mathcal{S}_V \oplus \mathcal{A}_V = V \otimes_{\mathbb{C}} V$.
(3) Montrer que $\mathcal{S}_V$ et $\mathcal{A}_V$ sont deux sous-représentations de $V \otimes_{\mathbb{C}} V$.
(4) Notons χ_V et χ_S les caractères respectifs des représentations V et $\mathcal{S}_V$. Montrer que

$$\chi_S(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)\right), \qquad \forall g \in G.$$

On pourra utiliser une base de V qui diagonalise l'endomorphisme $\rho(g)$.