Contrôle Continu
"Algèbre 1 - HAX708X"

21 octobre 2022

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction. Tout document ou calculatrice est interdit.

Durée : 1h30

Exercice 1 *(4 points)*

Soit A un anneau commutatif intègre et soit M un A-module. Soit M_{tor} l'ensemble des éléments de torsion de M, c'est-à-dire l'ensemble des $m \in M$ tels qu'il existe $a \in A - \{0\}$ tel que $am = 0$.

(1) Montrer que M_{tor} est un sous-module de M.
(2) Montrer que le module quotient M/M_{tor} est sans torsion *(i.e.* 0 *est le seul élément de torsion).*

Exercice 2 *(6 points)*

On considère le polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

(1) Déterminer la décomposition en facteur premier de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. *On calculera le produit* $P(1 - X)$.
(2) Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
(3) En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5}) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 *(8 points)*

On considère l'anneau $A = \mathbb{R}[X, Y]/(1 + Y - YX^2)$.

(1) Montrer que A est isomorphe à la localisation $S^{-1}\mathbb{R}[X]$ pour une certaine partie multiplicative $S \subset \mathbb{R}[X]$.
(2) Montrer que A est un anneau principal.
(3) Déterminer les éléments inversibles de A.
(4) Déterminer les morphismes d'anneaux de A dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 *(6 points)*

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'anneau quotient $A_n := \mathbb{Z}[i]/(n)$ et l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$.

(1) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
(2) Montrer que A_n est isomorphe au quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$.
(3) En déduire qu'un entier $n \geq 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si n est un nombre premier, et si -1 n'est pas un carré de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.