HAC310X Mathématiques pour la chimie S3

J.L. Ramírez Alfonsín
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,
Université de Montpellier
Place Eugène Bataillon, 34095, Montpellier

2 septembre 2024

Chapitre 1

Fonctions à plusieurs variables

Jusqu'à présent, nous avons considéré des fonctions qui prenaient en entrée un réel x et renvoyaient un réel $f(x)$. Cependant, rien n'empêche de considérer des fonctions qui prennent deux (ou plus. . .) réels x et y et renvoient un réel $f(x; y)$. Ces fonctions sont appelées *fonctions de plusieurs variables* et c'est le propos de notre étude ici. Nous nous restreindrons aux cas des fonctions de deux variables, mais la généralisation aux cas de trois variables ou plus est immédiate.

En guise d'exemple, considérons un échantillon d'une mole de gaz de Van der Waals, la pression P du gaz est une fonction de deux variables : sa température T, et le volume V occupé par cet échantillon. On a en effet :

$$P(T, V) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

où a, b et R sont des constantes (a et b dépendent du gaz considéré, R est une contante universelle)

Un autre exemple, considérons le cas simple d'une population évoluant sous la loi de Malthus. On sait alors que la population au temps t est $N(t) = N_0 e^{kt}$t où k est le taux de croissance ; quand on considère cette fonction du temps, cela signifie que l'on ne cherche à comprendre que la dépendance par rapport au temps de la population. Cependant, on voit assez rapidement que la population considérée dépend aussi du taux de croissance k : si on change celui-ci (par exemple parce qu'on regarde une autre population ayant un taux de croissance diifférent), même en ne regardant qu'un temps t fixé, la population va changer.

Il est donc naturel d'étudier la fonction de deux variables $f(t, k) = N_0 e^{kt}$, afin de comprendre à la fois l'effet du temps et du taux de croissance sur la population.

1.1 Représentation graphique

Une première difficulté notable des fonctions de plusieurs variables est leur représentation graphique. Lorsque l'on avait une fonction d'une variable x, on pouvait la représenter graphiquement dans le plan en se donnant un repère et en positionnant les points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$. Cependant, dans le cas d'une fonction de deux variables, ceci n'est pas possible : on devrait positionner en abscisse le couple de deux points $(x; y)$, pour mettre en ordonnée la valeur $f(x, y)$ correspondante ; or on ne peut positionner sur une droite un couple de points.

Un couple de points (x, y) se positionne dans un plan ; cela suggère donc la représentation graphique suivante : on se donne un plan (disons horizontal pour fixer les idées) sur lequel on positionne le couple (x, y) et, sur un troisième axe vertical, au dessus du point (x, y), on positionne un point à la hauteur $f(x, y)$. Cette représentation graphique de f , que l'on appelle *surface-graphe*, sera donc tri-dimensionnelle.

Exemple 1 *La surface-graphe de la fonction* $f(x, y) = x^3 - 7xy - 3$ *est illustré sur la Figure 1.1.*

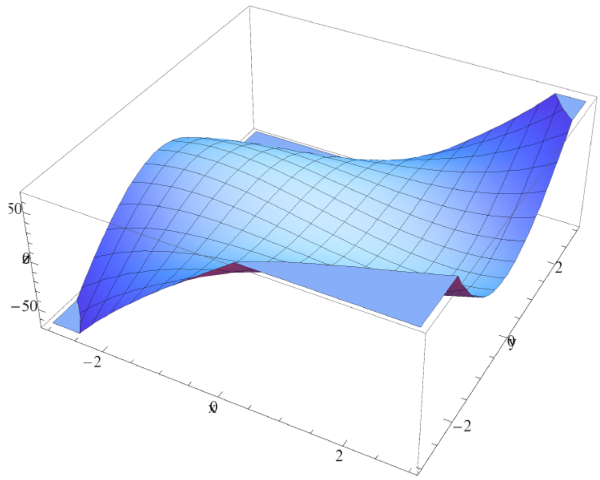

FIGURE 1.1 – Surface-graphe de $f(x, y) = x^3 - 7xy - 3$

1.2 Lignes de niveau

Le surface-graphe d'une fonction f est l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$. La *ligne de niveau* h de f est l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = h$. Pour passer du surface-graphe de f à la ligne de niveau h, il faut donc se restreindre aux points du graphe qui vérifient $z = h$, puis oublier la coordonnées z. L'ensemble des points qui vérifient $z = h$ est le plan horizontal d'altitude h. Oublier la coordonnée z, c'est projeter sur le plan (Oxy). On voit donc que la ligne de niveau h de f est obtenue en projetant dans le plan (Oxy) l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal $z = h$.

Exemple 2 *La Figure 1.2 illustre la ligne de niveau 5 de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, vue comme intersection du graphe de cette fonction (qui est un paraboloïde) et du plan d'équation $z = 5$.*

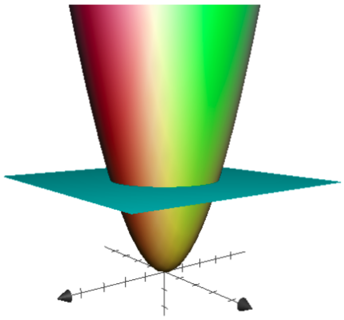

FIGURE 1.2 – Intersection du plan $z = 5$ et du Paraboloïde (obtenant un circle d'équation $5 = x^2 + y^2$).

1.3 Fonctions partielles

Beaucoup de problèmes concernant les fonctions de plusieurs variables peuvent se ramener à des problèmes concernant les fonctions d'une seule variable. Pour cela, on utilise les *fonctions partielles*, qui sont obtenues en fixant la valeur de l'une des variables.
Plus précisement, prennons f une fonction de deux variables x, y, et (x_0, y_0) un point du domaine de définition de f. On appelle *fonctions partielles* au point (x_0, y_0) les deux fonctions :

$$f_x : x \mapsto f(x, y_0) \text{ et } f_y : y \mapsto f(x_0, y).$$

Fixer $y = y_0$ revient à se placer dans le plan vertical d'équation $y = y_0$. De même, fixer $x = x_0$ revient à se placer dans le plan vertical d'équation $x = x_0$.

Exemple 3 *Sur la Figure 1.3 on a représenté le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ et le plan d'équation $x = 0$. Leur intersection est le graphe de la fonction partielle $f_y : y \mapsto f(0, y) = y^2$ (ce graphe est bien sûr une parabole).*

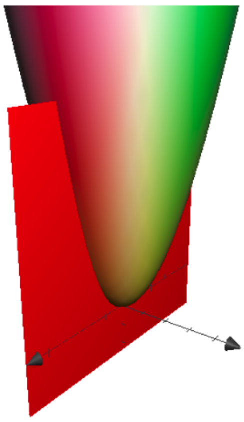

FIGURE 1.3 – Intersection du plan $x = 0$ et du Paraboloïde (obtenant une parabole).

1.4 Dérivées partielles

Un outil puissant dans l'étude des fonctions d'une variable est la dérivation. Il parait délicat d'étendre la notion de dérivée brutalement au cas d'une fonction de deux variables, mais on peut cependant parler des dérivées des fonctions partielles f_x et f_y , qui sont chacune des fonctions d'une variable.
Ces dérivés sont appelées *dérivées partielles* de $f(x, y)$, on les note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (f_x)'(x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (f_y)'(y)$$

Pour calculer ces dérivées partielles, il faut donc, dans la formule qui donne f, geler la variable par rapport à laquelle on ne dérive pas (par exemple geler y si on veut dériver par rapport à x) et dériver par rapport à l'autre variable. Autrement dit, on dérive par rapport à une variable tout en gardant l'autre fixe.

Les règles du calcul différentiel des fonction d'une variable sont donc encore applicables. On a des définitions semblables pour des fonctions de plus de deux variables.

Les dérivées partielles d'ordre deux sont quant à elles définies comme les dérivées partielles des dérivées partielles. Elles sont dénotées par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Le Lemme de Schwartz affirme que deux des quatre dérivées partielles d'ordre 2 de f coïncident

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Cette proposition est vraie quelle que soit la fonction f (de classe C^2). Quand vous calculez les dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction, si vous ne trouvez pas le même résultat pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ c'est que vous vous êtes trompé quelque part !

Exemple 4 *Si $z = f(x, y) = x^2 e^{-y}$, on a*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 e^{-y}$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{-y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2xe^{-y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{-y}.$$

Dans les applications, il est souvent nécessaire d'indiquer au moyen d'un indice quelle est l'autre variable lorsque l'on calcule une dérivée partielle.

Exemple 5 *L'équation d'état[1] pour n moles d'un gaz parfait est*

$$pV = nRT.$$

Considérant qu'elle définit le volume V comme fonction de la pression p, de la température T et de la quantité de matière n, on écrit

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n} = -\frac{nRT}{p^2}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,n} = \frac{nR}{p} \text{ et } \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{T,p} = \frac{RT}{p}$$

(R est une constante).

1.5 Points extremum et critiques

La notion de point critique définie pour les fonctions d'une variable se généralise facilement aux fonctions de plusieurs variables.

Soit f une fonction de deux variables x, y, et (x_0, y_0) un point du domaine de définition de f. On dit que (x_0, y_0) est un *point critique* de f si les deux déerivées partielles de f s'annulent en ce point :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Géométriquement, ceci signifie que le plan tangent au surface-graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est horizontal.

1. En physique, et plus particulièrement en thermodynamique, une équation d'état d'un systàme à l'équilibre thermodynamique est une relation entre différents paramàtres physiques (appelés variables d'état) qui déterminent son état.

On dira que f atteint son *maximum* au point (x_0, y_0) si, pour tout (x, y) dans le domaine de définition de f, on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.
On dira que f admet un *maximum local* au point (x_0, y_0) si l'inégalité $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ est vérifiée pour tout (x, y) dans le domaine de définition de f assez proche de (x_0, y_0), c'est-à-dire pour tout (x, y) dans un petit disque centré en (x_0, y_0).

Bien sûr, on définit de façon analogue les *minima* et *minima locaux*.

Comme pour les fonctions d'une variable, tout extremum est un point critique, mais tout point critique n'est pas forcement un point extremum.

Exemple 6 • *Le point* $(0, 0)$ *est un point critique de la fonction* $f(x, y) = x^2 + y^2$. *En fait, c'est un minimum local, et même un minimum absolu de* f, *en effet,* $f(0, 0) = 0$ *et* $f(x, y) > 0$ *pour tout* $(x, y) \neq (0, 0)$, *voir Figure 1.4 (a).*

• *Le point* $(0, 0)$ *est un point critique de la fonction* $g(x, y) = -x^2 - y^2$. *En fait, c'est un maximum local, et même un maximum absolu de* g, *voir Figure 1.4 (b).*

• *Le point* $(0, 0)$ *est un point critique de la fonction* $h(x, y) = x^2 - y^2$. *Cependant, ce n'est ni un minimum local, ni un maximum local. En fait,* $(0, 0)$ *est un "minimum dans la direction des* x*" (plus précisément,* 0 *est un minimum pour la fonction partielle* $x \mapsto h(x, 0)$*) et un "maximum dans la direction des* y*" (plus précisément,* 0 *est un maximum pour la fonction partielle* $y \mapsto h(0, y)$*) ; quand on tient compte des deux directions, ce n'est donc ni un minimum, ni un maximum. On dira que* $(0, 0)$ *est un* point selle *pour* h. *Le graphe de* h *est représenté dans la Figure 1.4 (c).*

• *Le point* $(0, 0)$ *est un point critique de la fonction* $i(x, y) = x^3$. *Cependant, ce n'est ni un minimum local, ni un maximum local (c'est exactement la même situation que celle du point* 0 *pour la fonction d'une variable* $x \mapsto x^3$*). On dira que* $(0, 0)$ *est un point* critique dégénéré *pour la fonction* i. *Le surface-graphe de* i *est représenté dans la Figure 1.4 (d).*

Exemple 7 **(recherche de points critiques)** *Soit* $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. *On a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x.$$

Pour que ces deux quantités s'annulent, il faut : $x^3 = y$ *et* $y^3 = x$. *Ces égalités impliquent* $y^9 = y$ *et* $x^9 = x$, *et donc* $x = -1, 0$ *ou* 1 *et* $y = -1, 0$ *ou* 1.
En tenant compte des contraintes $x^3 = y$ *et* $y^3 = x$, *on voit que les seules possibilités sont* $(x, y) = (0, 0)$ *ou* $(1, 1)$ *ou* $(-1, -1)$. *On vérifie que les deux dérivées partielles s'annulent pour ces valeurs de* (x, y). *Il y a donc trois points critiques :* $(0, 0), (1, 1)$ *et* $(-1, -1)$.

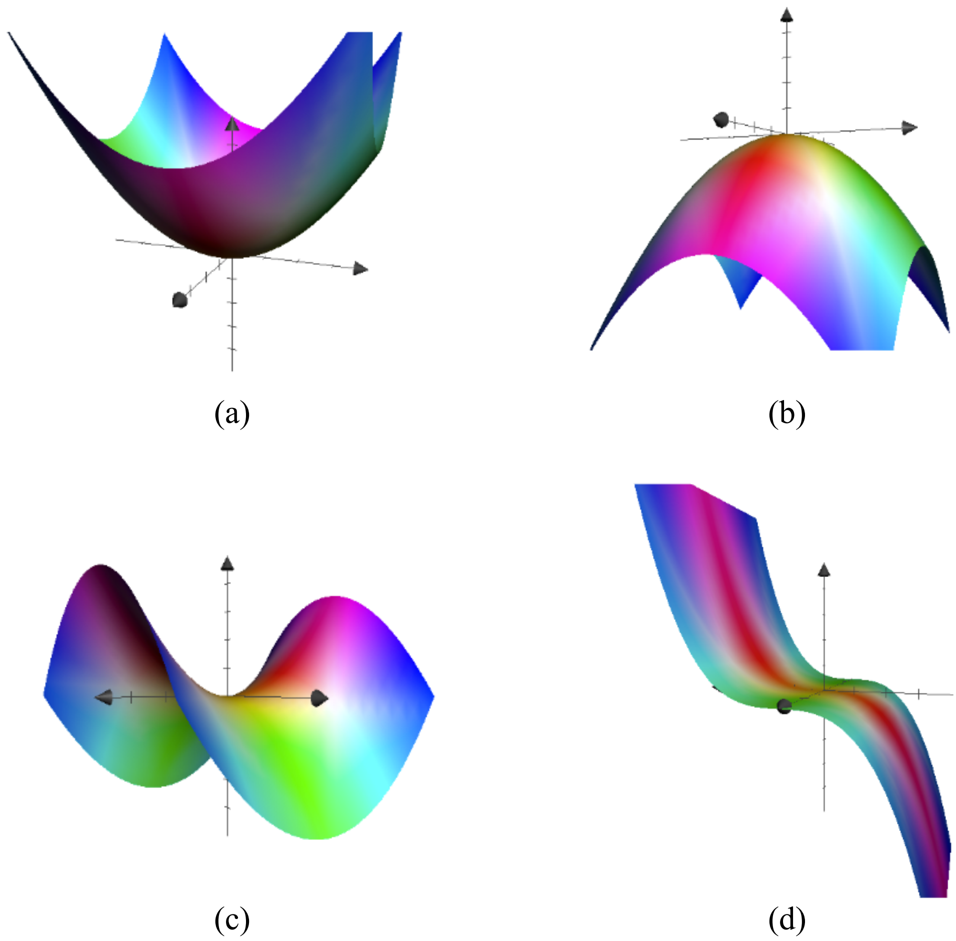

FIGURE 1.4 – Points critiques.

Pour les fonctions d'une variable, un point critique $x = a$ est un maximum local d'une fonction f si $f''(a) < 0$, un minimum local si $f''(a) > 0$ est un point d'inflexion si $f''(a) = 0$. Les conditions correspondantes pour une fonction de deux variables sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) < 0 \text{ pour un maximum,}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0 \text{ pour un minimum,}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 > 0 \text{ pour soit un maximum ou un minimum.}$$

Si la quantité $\Delta(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$ est négative alors le point est un point selle. Si $\Delta(a,b) = 0$ on ne peut rien conclure.

Les conditions correspondantes pour les fonctions de trois ou plus variables sont plus compliqués.

1.6 La différentielle

Les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ donnent le taux de variation de z en fonction d'une des deux variables lorsque l'autre est fixe. Lorsque x et y varient simultanément, la variation Δz est une fonction de x, y et des variations $\Delta x, \Delta y$. Nous approximons cette variation par la *forme différentielle*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Lorsque $dx = \Delta x$ et $dy = \Delta y$ tendent vers zéro, nous avons que Δz tend vers dz.

Exemple 8 *Si V est définie par $V = \frac{nRT}{p}$ (voir exemple 5) alors*

$$dV = \left(-\frac{nRT}{p^2}dp + \frac{nR}{p}dT + \frac{RT}{p}dn\right).$$

Pour $p = 1,05 \times 10^6, T = 300$ et $n = 1$ (nous avons que R est une constante qui vaut $8,31$)

$$dV = -2,26 \times 10^{-9}dp + 7,91 \times 10^{-6}dT + 2,37 \times 10^{-3}dn.$$

Si $dp = 10^3, DT = 1$ et $dn = 0$, on aura augmentation du volume

$$dV = 6,65 \times 10^{-6} > 0.$$

1.6.1 Différentielles exactes

Une forme différentiellle

$$w = F(x,y)dx + G(x,y)dy$$

est *exacte* quand il existe une fonction $z(x,y)$ telle que

$$F = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ et } G = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Pour que la forme différentielle w soit exacte il faut et (**pour les cas d'intérêt**) il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}. \tag{1.1}$$

Plus précisément, si une forme différentielle est exacte alors elle vérifie l'équation (1.1). La réciproque est fausse en générale. Cependant, pour de nombreux ouverts, les formes différentielles exactes qui vérifient l'équation (1.1) coïncident.
Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A est dite *étoilée* par rapport à un point a de A si, pour tout point x de A, le segment $[a, x]$ est contenu dans A, c'est-à-dire que dans A, tout point peut être relié à a par un chemin rectiligne.

Théorème 1.6.1 *(Poincaré) Sur un ouvert étoilé, toute forme diférentielle vérifiant l'équation* (1.1) *est exacte.*

Si l'on sait que $dz = F(x, y)dx + G(x, y)dy$ est exacte, on peut trouver z comme suit. D'abord

$$z = \int F(x, y)dx + H(y)$$

où H, inconnue, est dérminée par

$$G(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int F(x, y)dx\right) + H'(y).$$

Exemple 9 *(a) Soit* $w = F(x, y)dx + G(x, y)dy = (x^2 - y^2)dx + 2xydy$*. Nous avons*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y \neq 2y = \frac{\partial G}{\partial x}$$

La forme différentielle w *n'est pas exacte.*
(b) Soit $w = F(x, y)dx + G(x, y)dy = (2ax + by)dx + (bx + 2cy)dy$ *avec* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*. Nous avons que le domaine de définition est* $\mathbb{R}^2$ *et donc étoilé. En plus*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Donc la forme différentielle w *est exacte.*
Comme w *est exacte alors il existe* z *tel que* $dz = F(x, y)dx + G(x, y)dy$*, trouvons donc* z*. On sait que* $\frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y)$ *donc* $z = \int F(x, y)\, dx = \int (2ax+by)\, dx = ax^2+byx+H(y)$*, avec* $H(y)$ *une fonction indépendant de* x*. D'autre part, on sait que* $\frac{\partial z}{\partial y} = G(x, y)$ *et donc* $bx + H'(y) = bx + 2cy$ *obtenant* $H'(y) = 2cy$ *impliquant* $H(y) = cy^2$*. On en déduit que* $z = ax^2 + bxy + cy^2$ *(on peut vérifier que* $F = \frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $G = \frac{\partial z}{\partial y}$*).*

Exemple 10 *La forme différentielle* $dz = xdx + 2ydy$ *est exacte. Nous avons*

$$z = \int xdx + H(y) = \frac{x^2}{2} + H(y)$$

puis

$$2y = 0 + H'(y)$$

donc $H(y) = y^2$ *et* $z = x^2/2 + y^2$ *à une constante additive près.*

Exemple 11 *L'une d'équations fondamental de la thermodynamique est*

$$dU = TdS - pdV$$

où U est l'énergie interne du système thermodynamique, S son entropie et p, V et T est la pression, le volume et la temperature.
La quantité dU est la différentiel de $U = U(S, V)$ en fonction de S et de V. Nous pouvons donc l'écrire comme

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV.$$

En comparant ces deux dernières equations, nous obtenons

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} \text{ et } -p = \frac{\partial U}{\partial V}$$

Nous pouvons vérifier que

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial(-p)}{\partial S} = 0.$$

Dans le cas d'une fonction de 3 variables $f(x, y, z)$ la différentielle s'exprime par :

$$F(x, y, z)dx + G(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Pour que cette forme différentielle soit exacte il faut que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

1.7 Optimisation avec contraintes

La recherche des maxima et minima d'une fonction est appelée *optimisation*. Jusqu'à présent les x et y sont des variables indépendantes, sans contraintes sur leurs valeurs. Cependant, dans de nombreuses applications (en particulier dans la physique), l'optimisation peut être soumise à une ou plusieurs contraintes ; nous avons donc un problème d'*optimisation avec contraintes*. Ces contraintes prennent généralement la forme d'une ou plusieurs relations parmi les variables.

Exemple 12 *Trouver les points critiques de la fonction*

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 \text{ sujet à la contrainte } x + y = 2.$$

Remarquons que sans la contrainte, la fonction a un point selle à $x_1 = 1, y_1 = 0$, et f n'a aucun maximum ou minimum. La contrainte est une relation entre les variables x et *y qui réduit le nombre de variables indṕendantes à un. Dans le cas présent, la recherche d'un point critique est limité à la droite $y = 2 - x$. Ainsi, en substituant $y = 2 - x$ dans la fonction donne*

$$f(x, y) = F(x) = 3x^2 - 2(2 - x)^2 = x^2 + 8x - 8.$$

Alors,

$$F'(x) = 2x + 8 = 0, \quad F''(x) = 2 > 0$$

et donc $F(x)$ admet un minimum en $x = -4$. Nous avons donc que le point critique de $f(x, y)$ est un minimum en $(x, y) = (-4, 6)$, et sa valeur est $f(-4, 6) = -24$.

Le problème d'optimisation dans cet exemple a été simplifié en utilisant la contrainte pour éliminer l'une des variables. Cependant, en général, une telle simplification est soit difficile ou impossible, en particulier pour les fonctions de plus de deux variables ou lorsque il existe plusieurs contraintes. Une procédure générale pour résoudre la plupart des problèmes d'optimisation sous contraintes est la méthode de *multiplicateurs de Lagrange.*

Un extremum de la fonction de deux variables f soumise à la contrainte $g(x, y) = 0$ est un extremum libre de la fonction de trois variables, notée F, appelée le *lagrangien* de f, définie par

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

La variable supplémentaire λ est appelée *multiplicateur de Lagrange.*
Le problème d'optimisation sous contraintes devient un problème d'optimisation *libre* (sans contraintes) de la fonction F. On recherche donc ensuite les points critiques et leur multiplicateur associè à l'aide des conditions du premier ordre appliquées à la fonction F

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Exemple 13 *Pour déterminer les extremums locaux de la fonction*

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 1$$

le long de la droite

$$x + y = 2,$$

on peut éliminer y *et considérer la fonction* $F(x) = x^2 + 8x - 7$. *Comme* $F'(x) = 2x + 8$, *elle admet un minimum local en* $x = -4$. *Donc* f *admet un minimum local* -23 *au point* $(-4, 6)$.
Suivant la méthode de Lagrange, on introduit la fonction

$$F(x, y, \lambda) = 3x^2 - 2y^2 + 1 + \lambda(x + y - 2).$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x + \lambda,\ \frac{\partial F}{\partial y} = -4y + \lambda,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 2.$$

Le seul point où ces trois dérivées partielles s'annulent est $(x, y, \lambda) = (-4, 6, 24)$ *et* $f(-4, 6) = -23$.

1.8 Nouvelles variables

1.8.1 Une nouvelle variable

Si $z = f(x, y)$ et si $x = x(t)$ et $y = y(t)$ alors z est en fait une fonction de t dont on peut calculer la dérivée à l'aide d'une règle de dérivation en chaîne.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Exemple 14 *Soit* $z = x + x^2 y, x = t^2$ *et* $y = e^{-t}$. *Nous avons directement,*

$$z = t^2 + t^4 e^{-t}.$$

Donc,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2t + 4t^3 e^{-t} - t^4 e^{-t}.$$

On retrouve le même résultat en utilisant la règle de dérivation en chaîne puis en substituant.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial t} = (1 + 2xy)2t + x^2(-e^{-t}) = (1 + 2t^2 e^{-t})2t + t^4(e^{-t}).$$

1.8.2 Deux nouvelles variables

Si $z = f(x, y)$ et si $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$, nous avons

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{1.2}$$

et

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \tag{1.3}$$

En substituant

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \text{ et } dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

dans (1.2) nous obtenons

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv$$

et en comparant les coefficients correspondant de du et de dv avec ceux de (1.3), nous obtenons

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Cette règle s'étend aux fonctions de plus de deux variables.

Exemple 15 *Soit $z = xe^{x-y}$ et $x = u + v, y = u - v$. Nous pouvons calculer les dérivés partielles de z par rapport aux nouvelles variables u, v directement à partir de la expression*

$$z = (u + v)e^{2v}$$

ou au moyen de la formule précédente. Nous trouvons

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{2v} \text{ et } \frac{\partial z}{\partial v} = (1 + 2(u + v))e^{2v}.$$

1.8.3 Un cas particulier

Lorsque $x = u$ dans la formule du changement de variables précédente, il faut utiliser des indices pour bien spécifier de quelles variables il s'agit. Nous avons

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v.$$

Exemple 16 *Soit $z = xe - x - y$ et $x = u, y = u - v$. Nous trouvons*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = (1 + x)e^{x-y} \text{ mais } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_v = e^v.$$

L'équation de Laplace joue un rôle importante en physique. En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

et en coordonnées polaires

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0.$$

Exemple 17 *Montrons que la fonction $f = x^2 - y^2$ vérifie l'équation de Laplace.*
(i) En coordonnées cartésiennes,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \ \textit{et}\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(ii) En coordonnées polaires $f = r^2(cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos(2\theta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2r\cos(2\theta) = \frac{2f}{r},\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 2\cos(2\theta) = \frac{2f}{r^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -2r^2\sin(2\theta),\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = -4r^2\cos(2\theta) = -4f$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0.$$

1.9 Intégrales curvilignes

Le calcul du travail effectué par un système thermodynamique ou mécanique se calcule au moyen d'une intégrale curviligne. L'*intégrale curviligne* de la forme différentielle

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy$$

le long de la courbe

$$C = \{(x,y) \mid x = x(t), y = y(t),\ a < t < b\}$$

est, par définition

$$\int_C F(x,y)dx + G(x,y)dy = \int_a^b \left(F(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + G(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

Dans le cas, fréquent, où $x = t$, cela se simplifie à

$$\int_C F(x,y)dx + G(x,y)dy = \int_a^b \left(F(x,y(t)) + G(x,y(t))\frac{dy}{dx} \right) dx.$$

Si la forme différentielle est exacte, $dz = F(x,y)dx + G(x,y)dy$, l'intégrale ne dépend que des extrémités de la courbe C puisqu'elle correspond à la variation de z entre les extrémités de C :

$$\int_C F(x,y)dx + G(x,y)dy = \int_a^b \frac{dz}{dt}dt = z(x(b),y(b)) - z(x(a),y(a)).$$

Si l'on sait que $dz = F(x,y)dx + G(x,y)dy$ est exacte, on peut trouver z comme suit. D'abord

$$z = \int F(x,y)dx + H(y)$$

où H, inconnue, est dérminée par

$$G(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int F(x,y)dx \right) + H'(y).$$

Exemple 18 *Nous allons trouver l'intégrale curviligne de $z(x,y) = F(x,y)dx + G(x,y)dy$ avec $F = -y$ et $G = xy$ le long de la curve C de $x = 1$ à $x = 0$.*
(a) Si C est la droite $y = 1 - x$. Alors, $dy = -dx$ et donc

$$\int_C (-ydx + xydy) = \int_1^0 (-(1-x) - x(1-x))\, dx = \int_1^0 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}.$$

(b) Si C est un arc circulaire $y = \sqrt{1-x^2}$. Alors, $dy = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{x}{y}dx$ et donc Nous avons donc

$$\begin{aligned} \int_C (-ydx + xydy) &= \int_1^0 \left(-\sqrt{1-x^2} - x^2\right) dx \\ &= -\int_1^0 \sqrt{1-x^2}dx - [\tfrac{x^3}{3}]_1^0 \\ &= -\int_1^0 \sqrt{1-x^2}dx + \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ensuite, on considère le changement de variable $u = \arcsin x$ impliquant $x = \sin u$ et $dx = \cos u du$ et pour les limites si $x = 0$ alors $u = \frac{\pi}{2}$ et si $x = 1$ alors $u = 0$, obtenant

$$-\int_1^0 \sqrt{1 - \sin^2 u}\cos u \; du = -\int_{\pi/2}^0 \cos u \cos u \; du = -\int_{\pi/2}^0 \cos^2 u \; du$$

Comme $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ alors

$$\begin{aligned} -\int_{\pi/2}^0 \cos^2 u \; du &= -\tfrac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 (1 + \cos 2u)du \\ &= -\tfrac{1}{2}\left[(u + \tfrac{1}{2}\sin 2u)\right]_{\pi/2}^0 \\ &= -\tfrac{1}{2}(0 + 0 - \tfrac{\pi}{2} - 0) \\ &= -\tfrac{1}{2}(-\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Obtenant,

$$\int_C (-ydx + xydy) = \int_1^0 \left(-\sqrt{1-x^2} - x^2\right) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}.$$

Nous avons les trois propositions suivantes.

Proposition 1.9.1 *Si l'on change l'orientation de la courbe (C), l'intégrale curviligne de la forme w change de signe, ce que l'on peut représenter par l'égalité*

$$\int_{(C^-)} w = -\int_{(C^+)} w.$$

Proposition 1.9.2 *(***Relation de Chasles***) Si D est un point de la courbe $(C) = \widehat{AB}$, on a l'égalité*

$$\int_{(\widehat{AB})} w = \int_{(\widehat{AD})} w + \int_{(\widehat{DB})} w$$

Proposition 1.9.3 *Si w est une forme différelntielle exacte sur l'ouvert Ω et si f est une primitive de w (c-à-d, $w = df$), alors pour toute courbe de classe C^1, $(\widehat{AB})$ d'origine A et d'extremité B tracée dans Ω on a :*

$$\int_{(\widehat{AB})} w = f(B) - f(A).$$

Corollaire 1.9.4 *Si w est une forme différelntielle exacte sur l'ouvert Ω alors pour toute courbe* **fermée** *de classe C^1 tracée dans Ω on a :*

$$\int_C w = 0.$$

1.10 Intégrales doubles

La valeur moyenne $\bar{f}$ d'une fonction continue de deux variables $f(x,y)$ dans une région A du plan $\mathbb{R}^2$ se calcule au moyen d'une intégrale double :

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{aire de } A} \int \int_A f(x,y) dA$$

Lorsque A est un rectangle

$$A = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

nous avons

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

car la valeur de l'*intégrale itérée* ne dépend pas de l'ordre d'intégration.
Si A est un peu plus compliqué, disons

$$A = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x)\} = \{(x,y) \mid a(y) \le x \le b(y),\ c \le y \le d\}$$

nous avons

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy\right) dx$$

l'ordre d'intégration n'importe pas non plus (mais attention aux bornes d'intégration !).

Exemple 19 *Soit $f(x,y) = x^2y + x$. On souhaite calculer la valeur moyenne $\bar{f}$.*
(a) Si $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 4\}$ alors

$$\begin{aligned} \int\int_A f(x,y)dA &= \int_2^4 \left(\int_0^1 (x^2y+x)dx\right) dy \\ &= \int_2^4 \left[y\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy \\ &= \int_2^4 \left(\frac{y}{3}+\frac{1}{2}\right) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{6} + \frac{1}{2}y\right]_2^4 \\ &= \frac{16}{6} + \frac{4}{2} - \left(\frac{4}{6}+\frac{2}{2}\right) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Comme le volume de A vaut 2 alors $\bar{f} = 3/2$.
(b) Si $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x+y \le 1\}$

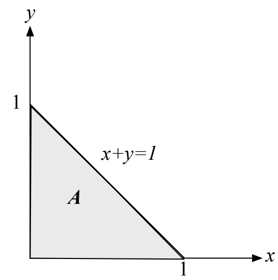

FIGURE 1.5 – Région A.

Alors

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2y+x)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2(1-x)^2}{2} + x(1-x)\right) dx = \frac{11}{60}.$$

Comme le volume de A vaut $1/2$ alors $\bar{f} = 11/30$.

Exemple 20 *Soit* $f(x,y) = x\sin(\pi y)$ *et* $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$.

$$\begin{array}{ll} \int\int_A f(x,y)dA & = \int_0^1 \left(\int_0^x x\sin(\pi y)\ dy\right) dx \\ & = \int_0^1 \left[-\frac{x}{\pi}\cos(\pi y)\right]_0^x dx \\ & = (-\frac{x}{\pi}\cos\pi x - (-\frac{x}{\pi}\cos(0\pi)))dx \\ & = \int_0^1 (\frac{x}{\pi} - \frac{x}{\pi}\cos(\pi x)dx \\ & = \int_0^1 \frac{x}{\pi}dx - \int_0^1 \frac{x}{\pi}\cos(\pi x)dx \\ & = \left[\frac{x^2}{2\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\pi}\cos(\pi x)dx \\ & = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)dx \end{array}$$

On intègre $\frac{1}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)dx$ *par parties, en prenant* $u = x, u' = 1, v' = \cos\pi x$ *et* $v = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$*, nous avons*

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx & = \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin\pi x}{\pi}dx\right) \\ & = \frac{1}{\pi^2}\left(\sin\pi - 0\sin 0\pi - \int_0^1 \sin\pi x dx\right) \\ & = \frac{1}{\pi^2}\left(0 - \left[\frac{-\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1\right) \\ & -\frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) \\ & = \frac{2}{\pi^3}. \end{array}$$

Et donc

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^x x\sin\pi y\ dy\right) dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{\pi^3}.$$

Si $f(x,y) > 0$, l'intégrale double

$$\int\int_A f(x,y)dA$$

donne le volume compris entre les surfaces $z = f(x,y)$ et $z = 0$ au-dessus de A.

Exemple 21 *Le volume du tetraèdre*

$$V = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ x+y+z \le 1\}$$

est donnée par

$$\int\int_A (1-x-y)dA$$

où $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x+y \le 1\}$*, c'est-à-dire*

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)dy\right) dx = \frac{1}{6}.$$

1.10.1 Utilisation des coordonnées polaires

Lorsque la région A présente une symétrie circulaire ou que la fonction $f(x,y)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2}$, on peut utiliser les coordonnées polaires r, θ avec $x = r\cos\theta, y = \sin\theta$. Puisque l'élément d'aire dA est

$$dA = dx\ dy = rdr\ d\theta.$$

Nous avons

$$\int\int_A f(x,y)dA = \int\int_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ dr\ d\theta.$$

Attention : il faut pas oublier le r.

Exemple 22 *Soit $f(x,y) = x^2$ et $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. On intègre ensuite par tranche. C'est particulièrement simple ici car le domaine est un carré $]0,1[\times]0,2\pi[$ et la fonction à intégrer un produit de fonctions dépendant de chaque coordonnée. Nous avons*

$$\begin{aligned}
\int\int_A f(x,y)dA &= \int\int_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ drd\theta \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta d\theta\right) dr \\
&= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta (\text{ en utilisant } \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1) \\
&= \tfrac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exemple 23 *Lorsque la région A n'est pas bornée, il faut calculer une limite supplémentaire.*

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\tfrac{y^2}{x^2+y^2}dA &= \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2}\sin^2\theta dA \\
&= \lim_{a\to+\infty}\int\int_{r<a} e^{-r^2}\sin^2\theta dA \\
&= \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-r^2} r\ dr \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \\
&= \lim_{a\to+\infty}\tfrac{\pi(1-e^{-a^2})}{2} \\
&= \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exemple 24 *En calcul des probabilités, on utilise beaucoup la relation*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}.$$

En calculat le carré de l'intégrale via coordonnée polaires

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy &= \int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2/2}drd\theta \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi}\left(-e^{-r^2/2}\Big|_{r=0}^{+\infty}\right)d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

1.11 Intégrales triples

La valeur moyenne $\bar{f}$ d'une fonction continue de trois variables $f(x,y,z)$ dans une région V de l'espace $\mathbb{R}^3$ se calcule au moyen d'une intégrale triple :

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{volume de } V} \int\int\int_V f(x,y,z)dV.$$

Exemple 25 *Soit* $f(x,y,z) = xy^2z^3$ *et* $V = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c\}$. *Nous avons*

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dV = \int_0^a \left(\int_0^b \left(\int_0^c xy^2z^3dz\right)dy\right)dx = \int_0^a \left(\int_0^b xy^2\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^c dy\right)dx = \frac{a^2}{2}\frac{b^3}{3}\frac{c^4}{4}$$

Comme le volume de V *vaut abc alors* $\bar{f} = \frac{ab^2c^3}{24}$.

Exemple 26 *Lorsque* $f(x,y,z) > 0$, *l'intégrale triple peut toujours s'interpréter comme la masse d'un solide* V *de densité variable. Par exemple, si sa densité est*

$$f(x,y,z) = (1-z)ye^{-xy},$$

la masse du cube

$$V = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

est

$$\begin{aligned}
\int\int\int_V f(x,y,z)dV &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (1-z)ye^{-xy}dx\right)dy\right)dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (1-z)\left(\int_0^1 ye^{-xy}dx\right)dy\right)dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (1-z)\left[-e^{-xy}\right]_0^1 dy\right)dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (1-z)(1-e^{-y})dy\right)dz \\
&= \int_0^1 (1-z)\left[y+-e^{-y}\right]_0^1\ dz \\
&= \int_0^1 (1-z)(1+e^{-1}-1)\ dz \\
&= \frac{1}{e}\int_0^1 (1-z)\ dz \\
&= \frac{1}{e}\left[z-\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{e}(1-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2e}.
\end{aligned}$$

1.11.1 Coordonnées sphériques

Nous pouvons repérer un point P dans l'espace au moyen de ses coordonnées cartésiennes x, y, z ou au moyen de ses *coordonnées sphériques* r (la distance *radiale*), θ (la *colatitude*) et φ (la *longitude*). Ces dernières sont définies par les relations

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

où $r > 0, 0 < \theta < \pi$ (attention !) et $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$. La transformation inverse est

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \arccos \tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

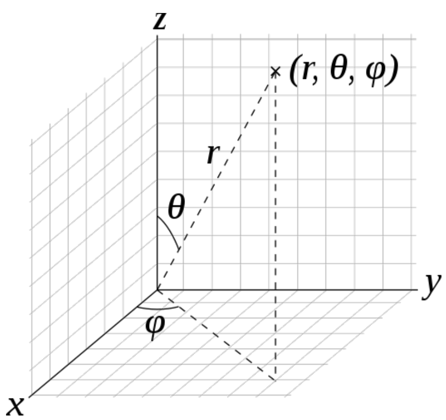

FIGURE 1.6 – Les coordonnées sphériques.

La surface $r = r_0$ est une sphère centrée à l'origine, la surface $\theta = \theta_0$ est un cône dont le sommet est à l'origine et la surface $\varphi = \varphi_0$ est un demi-plan appuyé sur l'axe des z. La courbe $r = r_0, \theta = \theta_0$ est une parallèle, la courbe $r = r_0, \varphi = \varphi_0$ est un méridien.
L'équation de Laplace en trois dimensions est

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \tag{1.4}$$

Il est utile de l'écrire en coordonnées sphériques pour le cas fréquent où la fonction f ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. L'équation (1.4) devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Utilisation des coordonnées sphériques

Lorsque la région V présente une symétrie par rapport à un pointou ou que la fonction $f(x,y,z)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on peut utiliser les coordonnées sphériques r,θ,φ. Puisque

$$dV = dx\ dy\ dz = dr \times rd\theta \times r\sin\theta d\varphi = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi.$$

Nous avons

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dV = \int\int\int_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2 dr\ d\theta\ d\varphi.$$

Exemple 27 *Soit $f(x,y,z) = a - \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Nous avons*

$$\begin{aligned}&a - \sqrt{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta} = a - \sqrt{r^2(\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta)}\\ &= a - \sqrt{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\\ &= a - r\end{aligned}$$

La masse de la sphère de rayon a et de densité $f(x,y,z)$ est

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^a (a-r)r^2\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi.$$

On intègre ensuite par tranche car le domaine est un pavé $]0,2\pi[\times]0,\pi[\times]0,a[$ et la fonction à intégrer un produit de fonctions dépendant de chaque coordonnée. On obtient

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^a (a-r)r^2\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^a (a-r)r^2 dr = \frac{\pi}{a^4}3.$$

Le volume de la sphère étant $4\pi a^3/3$, cela correspond à une densitè moyenne de $a/4$.

Exemple 28 *La valeur moyenne de la fonction $f(x,y,z) = z$ sur l'hémisphère*

$$V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge 0\}$$

est

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2\pi a^3}\int\int\int_V z dV &= \tfrac{3}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a r\cos\theta r^2\sin\theta dr\right)d\theta\right)d\varphi\\ &= \tfrac{3}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^a r^3 dr\\ &= \tfrac{3}{2\pi a^3}2\pi\left(-\tfrac{\cos 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}\tfrac{a^4}{4}\\ &= \tfrac{3a}{8}.\end{aligned}$$