HAC310X Mathématiques pour la chimie S3

J.L. Ramírez Alfonsín
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,
Université de Montpellier
Place Eugène Bataillon, 34095, Montpellier

2 septembre 2024

Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Motivations historiques

En 1545, le mathématicien italien Girolamo Cardan [1] proposa le problème suivant :

> *Comment diviser une droite de longueur 10 de telle sorte que le rectangle construit avec les 2 parties de la division ait une aire de 40 ?*

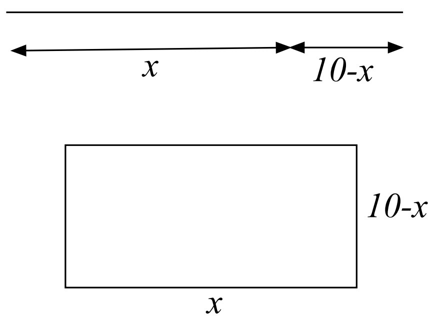

FIGURE 1.1 – Problème de Cardan

Ce problème a pour solutions les racines de l'équation du second degré $x(10-x) = 40$ dont on vérifiera aisément qu'elle admet les 2 racines $5 \pm \sqrt{-15}$. Il s'agissait d'un premier cas "concret" qui conduisit à s'interroger sur le sens à donner aux racines carrées de nombres négatifs.
Un autre exemple plus simple est donné par l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$ puisque $x^2 + 1 \geq 1$.

1. Cardan (1501-1576) est un des plus fameux algébriste du moyen-âge puisqu'on lui doit en particulier la méthode de résolution des équations du 3ème degré

Deux siècles plus tard, vers 1740, le mathématicien suisse Léonard Euler fut le premier à introduire la notation i pour désigner le “symbole”', $\sqrt{-1}$, soit $i = \sqrt{-1}$ et donc, formellement, $i^2 = -1$. Ainsi, en utilisant formellement les règles de calcul établies pour les réels, les solutions du problèmes de Cardan peuvent-elles s'éecrire

$$5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{i^2 15} = 5 \pm i\sqrt{15}.$$

Cette écriture met donc en évidence de nouvelles grandeurs mathématiques qui s'expriment à l'aide d'un couple de réels $(5, \sqrt{15})$ et du symbole i. Cette première piste a été approfondie et formalisée au début du XIXème siècle par l'interprétation des nombres complexes (un terme dû au mathématicien allemand Carl FriedrichGauss) comme des points d'un plan muni d'un repère cartésien, dont un axe est l'axe des nombres réels tandis que l'autre est celui des nombres *imaginaires*.

1.2 Le corps des nombres complexes

Les entiers naturels $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ sont fermés sous l'opération d'addition $m + n$ et de multiplication mn.
Pour obtenir un système également clos sous la soustraction on doit passer aux entirs relatifs $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, , \ldots\}$ et pour obtenir un ensemble de nombres aussi fermé sous la division, il faut considérer les quotients d'entiers relatifs, ce qui conduit aux nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Ce *corps* de nombres est cependant insuffisant en sciences car il ne permet ni de mesurer l'hypothénuse d'un carré ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), ni la circonférence d'un cercle ($\pi \notin \mathbb{Q}$) ni d'exprimer les intérêts composés *continûment* ($\exp \notin \mathbb{Q}$). Pour cela, les nombres réels sont nécessaires, qui correspondent à l'ensemble de tous les développements décimaux possibles

$$\mathbb{R} = \left\{ \pm \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k 10^k \mid d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\} \right\}.$$

Deux réels a et b définissent un nombre *complexe* noté $z = a+ib$. Le réel a, noté $a = \Re(z)$, est appelé la *partie réelle* de z et le réel b, noté $b = \Im(z)$, est appelé la *partie imaginaire* de z.
Pour tout a, a', b, b', on a :

$$a + ib = a' + ib \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
Sur $\mathbb{C}$, nous définissons deux opérations appelées addition et multiplication.

1.2.1 L'addition de $\mathbb{C}$

Soit a, a', b, b' quatre réels et $z = a + bi,\ z' = a' + b'i$ les nombres complexes correspondants. L'addition de z et z' dans $\mathbb{C}$ est définie par :

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i.$$

Quelques propriétés de l'addition de $\mathbb{C}$

• Associative : pour tout $z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
• Commutative : pour tout $z, z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z$.
• Le complexe $0+0i$, noté 0, est appel *élélment neutre* de l'addition. C'est le seul nombre complexe vérifiant pour tout $z \in \mathbb{C}, z + (0 + 0i) = (0 + 0i) + z = z$.
• Tout élément $z \in \mathbb{C}$ admet un symétrique z', noté $-z$. C'est le seul nombre complexe vérifiant $z + z' = z' + z = 0$. Au vue de ces quatre propriétés, on dit que $\mathbb{C}$ est un *groupe commutatif* relativement à l'addition.

1.2.2 La multiplication de $\mathbb{C}$

Soit a, a', b, b' quatre réels et $z = a + bi,\ z' = a' + b'i$ les nombres complexes correspondants. La multiplication de z et z' dans $\mathbb{C}$ est définie par :

$$zz' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$$

En particulier, si $z = z'$ alors

$$z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi \tag{1.1}$$

Quelques propriétés de la multiplication de $\mathbb{C}$

• Associative : pour tout $z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'')$.
• Commutative : pour tout $z, z' \in \mathbb{C}, zz' = z'z$.
• La multiplication possède un élément neutre $1 + 0i$, noté 1. C'est le seul nombre complexe vérifiant que pour tout $z \in \mathbb{C}, z(1 + 0i) = (1 + 0i)z = z$.
• Tout élément $z \in \mathbb{C}$ distinct de 0 admet un symétrique z' appelé *inverse* de z, noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$. Ce complexe z' est l'unique élément de $\mathbb{C}$ vérifiant

$$zz' = z'z = 1.$$

Au vue de ces propriétés, on dit que $\mathbb{C}$ est un *corps commutatif* relativement aux opérations addition et multiplication. Sur le corps des nombres complexes, on peut distinguer une troisième opération dite de multiplication par un réel. Elle associe à tout réel λ et tout complexe $z = a + bi$ le complexe

$$\lambda z = \lambda a + \lambda bi.$$

1.3 Représentation géométrique des nombres complexes

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.
• A tout point du plan M de coordonnées (x, y), on peut associer le nombre complexe $z_M = x + iy$. Le nombre complexe z_M s'appelle l'*affixe* du point M.
Inversement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer le point M de coordonnées (x, y). M s'appelle l'*image ponctuelle* du nombre complexe z.

• A tout vecteur du plan $\mathbf{u}$ de coordonnées (x, y), on peut associer le nombre complexe $z_{\mathbf{u}} = x + iy$. Le nombre $z_{\mathbf{u}}$ s'appelle l'*affixe* du vecteur $\mathbf{u}$.
Inversement, à tout nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer le vecteur $\mathbf{u}$ de coordonnées (x, y). $\mathbf{u}$ s'appelle l'*image vectorielle* du nombre complexe z.

1.4 La conjuguaison d'un nombre complexe

Un nombre complexe est dit *réel* si sa partie imaginaire est nulle et *imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle.
On appelle *conjugaison* l'application

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z = a + bi & \mapsto & \bar{z} = a - bi \end{array}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.
Le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$ est appelé le *conjugué* de z.
Quelques propriétés de la multiplication de la conjugaison

Soit $z, z' \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors,
• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
• $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$.
• $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.
• $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.
• $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
• $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.
• $\Im(z) = \frac{1}{2}i(z - \bar{z})$.
En particulier, on obtient

$$\bar{z} = z \iff \Im(z) = 0, \qquad \bar{z} = -z \iff \Re(z) = 0.$$

Soit a, b deux réels et $z = a + bi$, on a

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi + b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

qui est donc un réel positif.

1.4.1 La division de $\mathbb{C}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)}$$

La division peut-être réalisée en utilisant le conjugué du dénominateur. En effet en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}_2 = a_2 - ib_2$ nous transformons le dénominatuer dans un nombre reéel.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} &= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2^2 + b_2^2)} \\ &= \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) + i\left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right).\end{aligned}$$

La division est seulement définie si $z_2 \neq 0$, c'est-à-dire, si $a_2 \neq 0$ et $b_2 \neq 0$.

1.5 Le module d'un nombre complexe

Soit a, b deux réels et $z = a + bi$. On appelle *module* de z et on note $|z|$ le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
On remarque que si z est réel, $|z|$ n'est autre que la valeur absolue de z.

En utilisant (1.1) on obtient

$$|z^2| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2+b^2 \tag{1.2}$$

Quelques propriétés du module d'un nombre complexe

Soit $z, z' \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$
- $|z| = |\bar{z}|$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $|z + z'| \leq |z| + |\bar{z}|$.
- $|\lambda z| = |\lambda||z|$.
- $|zz'| = |z||z'|$.
- $|z^n| = |z|^n$.
- $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ pour $z \neq 0$.
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
- $\Re(z) \leq |z|$.

• $|Im(z)| \leq |z|$.

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$. On rappelle que $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. Donnons une nouvelle condition nécessaire et suffisante d'égalité de deux nombres complexes.

Théorème 1.5.1 *Soient z et z' deux nombres complexes. Alors,*

$$z = z' \iff \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ |z| = |z'| \\ sgn(Im(z)) = sgn(Im(z')) \end{cases}$$

Dans le théorème ci-dessus, l'égalité $sgn(Im(z)) = sgn(Im(z'))$ (signe de $Im(z)$ égale signe de $Im(z')$) signifie que $Im(z)$ et $Im(z')$ sont ou bien tous deux strictement positifs, ou bien tous deux strictement négatifs, ou bien tous deux nuls.
Cette caractérisation est bien utile pour démontrer le résultat suivant.

Théorème 1.5.2 *Tout nombre complexe non nul admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées, opposées l'une à l'autre.*

Exemple 1 *Trouvons les racines carrées de $8-6i$ dans $\mathbb{C}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels. D'après equations (1.1) and (1.2) on a $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ and $|z^2| = x^2 + y^2$. Donc,*

$$z^2 = 8 - 6i \iff \begin{cases} \Re(z^2) = 8 \\ |z^2| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \\ sgn(Im(z^2)) = sing(-6) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(10+8) \\ y^2 = \frac{1}{2}(10-8) \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \iff (x, y) = (3, -1) \ ou \ (x, y) = (-3, 1) \iff z = 3 - i \ ou \ z = -3 + i$$

Les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$. Nous pourront vérifier que $(3 - i)^2 = (-3 + i)^2 = 8 - 6i$.

1.5.1 L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

On utilise les résultats précédents pour résoudre l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

Théorème 1.5.3 *Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ puis*

$$(E) \ : az^2 + bz + c = 0 \ où \ z \in \mathbb{C}.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ puis on note δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. L'équation (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions, distinctes ou confondues, à savoir

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

De plus, dans le cas où $\Delta \neq 0$, ces deux solutions sont distinctes et dans le cas où $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une seule solution dite double à savoir $z_1 = -\frac{b}{2a}$.

Exemple 2 *On résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$. Le discriminant du trinôme $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$ est*

$$\Delta = (4+i)^2 - 4(5+5i) = 16 + 8i - 1 - 20 - 20i = -5 - 12i.$$

$\Delta \neq 0$ et donc l'équation (E) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$. Déterminons les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$. Soient a et b deux réels puis $\delta = a + ib$.

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ a^2 + b^2 = 13 \\ ab < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 9 \\ ab < 0 \end{cases}$$

$$\iff \delta = 2 - 3i \text{ ou } \delta = -2 + 3i$$

Ainsi, le nombre $\delta = 2 - 3i$ est un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. L'équation $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$ admet deux solutions distinctes à savoir

$$z_1 = \frac{(4+i)+(2-3i)}{2} = 3 - i \text{ et } z_2 = \frac{(4+i)-(2-3i)}{2} = 1 + 2i.$$

1.6 Géométrie des nombres complexes

Les nombres complexes peuvent ainsi être représentés comme les points d'un plan, la partie réelle de z correspondant à l'abscisse x du point P qui lui est associée et la partie imaginaire correspondant à l'ordonnéee y de P.
Le nombre positif $r = |z|$ est le *module* de z

1.6.1 Représentation polaire

On dit d'un nombre complexe z écrit sous la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$, qu'il est sous sa forme *rectangulaire* ou *cartésienne*. S'il est écrit sous la forme

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z|$, on dit qu'il est sous sa forme *polaire*. La valeur de θ est appelé *l'argument* et est désigé par $arg(z)$.

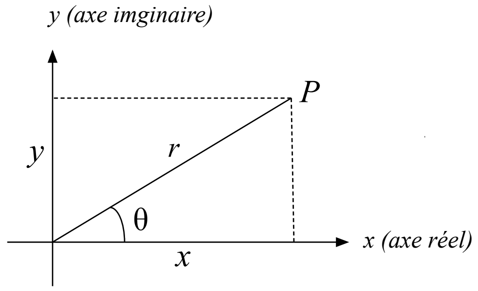

FIGURE 1.2 – Représentation géométrique d'un nombre complexe. P est l'image ponctuelle de z.

Notons que $r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$ représente le même nombre complexe pour chaque entier relatif k. Pour garantie l'unicité, il est d'usage de choisir $0 \leq \theta < 2\pi$. (Certaines références utilisent plutôt $-\pi \leq \theta < \pi$.).
En pratique, la conversion de la forme rectangulaire à la forme polaire est souvent faite de façon approximative (même si la précision de l'approximation peut être choisie de manière arbitraire) à moins que les arguments soient des angles dont le sinus et le cosinus peuvent être calculés exactement ; comme $\pi/6, \pi/4, \pi/3$, etc.

De la forme rectangulaire à la forme polaire

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Sa forme polaire est $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Considérons d'abord quelques cas spéciaux. Si $z = 0$, alors $r = 0$. Donc, θ peut prendre n'importe quelle valeur. Cependant, nous adoptons la convention que $\theta = 0$ dans un tel cas, à moins qu'il en soit indiqué autrement.
Supposons maintenant que $a = 0$. Dans ce cas, le module de z est $r = |b|$ et

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } b > 0, \\ 3\pi/2 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Supposons finalement que $a \neq 0$. Soit $\alpha = \tan^{-1}(\frac{|b|}{|a|})$ (on rappel que $\arctan\alpha = \tan^{-1}(\alpha)$). Le tableau suivant indique la valeur de l'argument θ en fonction des signes de a et b :

$$\theta = \begin{cases} \alpha & a > 0, b \geq 0, \\ \pi - \alpha & a < 0, b \geq 0, \\ \pi + \alpha & a < 0, b < 0, \\ 2\pi - \alpha & a > 0, b < 0. \end{cases}$$

Cette représentation permet de visualiser les opérations algébriques sur les nombres complexes. En particulier, en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques

Exemple 3 *Exprimons z sous forme polaire.*
(i) $z = 1 + i$. Nous avons que $r = |z| = \sqrt{2}$, $\tan^{-1}(1) = \pi/4$. Comme $a, b > 0$ alors $\arg z = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. Nous obtenons $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

(i) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Nous avons que $r = |z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$, $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi/3$. Comme $a, b < 0$ alors $\arg z = \tan^{-1}(\sqrt{3}) + \pi = 4\pi/3$. Nous obtenons $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$.

Addition

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ représenté par un point P et $z_2 = x_2 + iy_2$ représenté par le point Q. La représentation de la somme

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

est le point $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Multiplication et division

Les opérations multiplication et divisions sont plus simplement décrites quand on considère leurs représentations polaire. Soient $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Alors,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2)\right) \\ &= r_1 r_2\left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Nous avons également que si $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$ alors

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \arg z = -\arg\bar{z}$$

et

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \text{ et } \arg z\bar{z} = 0.$$

Dans le cas de la division

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

et

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

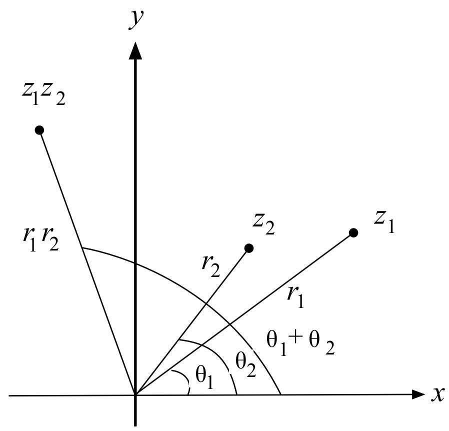

FIGURE 1.3 – Représentation géométrique de la multiplication de deux nombres complexe

Pour l'inverse d'un nombre complexe, nous obtenons

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$$

et comme $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right).$$

1.7 La formule de Moivre

En utilisant les propriétés précédentes, nous obtenons que

$$|z_1 \cdots z_{n-1}z_n| = |z_1 \cdots z_{n-1}| \times |z_n| = \cdots = |z_1| \times \cdots \times |z_n|$$

et

$$\arg(z_1 \cdots z_{n-1}z_n) = \arg(z_1 \cdots z_{n-1}) + \arg(z_n) = \cdots = \arg(z_1) + \cdots + \arg(z_n)$$

et donc

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n(\cos(\theta_1 + \cdots \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \cdots \theta_n)).$$

Dans le cas spécial quand $z_1 = \cdots = z_n$ nous avons

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Ceci est la *formule de Moivre* pour un entier positive n. La formule est également valide pour les entiers négatives. En effet,

$$\frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n} = \frac{1}{(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$

et donc

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$

1.8 Formule d'Euler

L'exponentielle d'un nombre complexe peut être définie en généralisant la définition de l'exponentielle d'un nombre réel par la série suivante

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Cette définition a un sens car on peut montrer que cette série est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Cette définition constitue un premier exemple de fonction d'une variable complexe.
Dans le cas particulier des imaginaires purs, $z = iy, y \in \mathbb{R}$, après avoir regroupés les termes pairs et impairs, on obtient :

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \cdots\right) = \cos y + i\sin y$$

où on a utilisé la définition en termes de séries d'une sinus et du cosinus d'un nombre réel. Il s'agit de la formule dite d'Euler (1743), dite également *représentation trigonométrique* de l'exponentielle :

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

En utilisant cette formule, nous obtenons que

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$$

Cette relation faisant intervenir les nombres transcendants e et π, l'unité négative -1, et l'unité imaginaire i, est probablement la relation la plus remarquable en mathématiques !
On peut également remarquer que

$$i = e^{i\pi/2}.$$

En utilisant (1.3), on obtient que tout nombre complexe z admet une *représentation exponentielle* donnée par

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \quad \text{où } r = |z| \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Le résultat suivant donne l'unicité de la représentation exponentielle.

Théorème 1.8.1 *Nous avons*

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \textit{ si et seulement si } r = r' \textit{ et } \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 4 *Exprimons $e^{-i\pi/2}$ sous forme $x + iy$.*

$$e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2) = \cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2) = 0 - i \cdot 1 = -i.$$

Exemple 5 *Calculons $\sqrt{i}$. Nous cherchons $z = re^{i\theta}$ tel que $z^2 = i$ ou bien $(re^{i\theta})^2 = 1$ ou encore $r^2e^{2i\theta} = i$. Comme, $i = e^{i\pi/2}$ alors*

$$r^2e^{2i\theta} = e^{i\pi/2}$$

Comme $r > 0$, on obtient $r = 1$ et $2i\theta = i\pi/2 + 2\pi$ ou bien $2\theta = i\pi/2 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou encore $\theta = \pi/4 + k\pi$. On a $\theta = \pi/4$ ou $\theta = 5\pi/4$. On en déduit

$$z = \cos\pi/4 + i\sin\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \textit{où} \quad z = \cos 5\pi/4 + i\sin 5\pi/4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Nous pouvons vérifier que, par exemple, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + i^2 + 2i) = i$.

En remplaçant x par $-x$ dans (1.3), on a $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, et en combinant ces deux expressions, on obtient les fonctions trigonométriques en termes d'exponentielles imaginaires :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Exemple 6 *Résolvons $z^3 = 1$ en utilisant la forme exponentielle.*

$$\begin{aligned} z^3 = 1 &\iff (re^{i\theta})^3 = 1, \quad r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in]-\pi, \pi[\\ &\iff r^3e^{i3\theta} = 1 = 1e^{i0} \\ &\iff r^3 = 1 \textit{ et } 3\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\iff r = 1 \textit{ et } \theta \in \{0, \tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{4\pi}{3}\} = \{0, \tfrac{2\pi}{3}, -\tfrac{2\pi}{3}\}. \end{aligned}$$

Nous avons que les racines cubiques de z sont :
$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$, $z_2 = \cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3$ *et* $z_3 = \cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3$.