Feuille TD 1 : Matrices

Exercice 1. Soient $\mathbf{u} = (3, 1, -1)$ et $\mathbf{v} = (1, 2, -3)$. Trouver $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ainsi que l'angle entre ces deux vecteurs.

Exercice 2. Soient $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{w} = -\mathbf{k}$.
a) Calculer $\mathbf{x} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} + 4\mathbf{w}$.
b) Trouver un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{w}$ et à $\mathbf{x}$.
c) Trouver un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{v}$ et à $\mathbf{w}$.
d) Soient $s = (1, 6)$ et $t = (3, 18)$. Les vecteurs s et t sont-ils parallèles ? orthogonaux ? aucun des deux ?

Exercice 3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer : $A + B$, AB, $B + BA$ et $3B - A^3$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
a) A est-elle inversible ? Si c'est le cas, calculer son inverse.
b) Calculer A^t.
c) A est-elle orthogonale ?

Exercice 5. Montrer que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$. En déduire $\det(AB)$.
b) Calculer A^{-1} et B^{-1}. En déduire $(AB)^{-1}$.

Exercice 7. Le système suivant : $\begin{cases} x + y + z & = 2 \\ 2x + y + z & = 3 \\ x + 2y + 2z & = 3 \end{cases}$ admet-il une solution unique ? Si ce n'est pas le cas, donner l'ensemble de toutes les solutions.

Exercice 8. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y + z & = 2 \\ 2x + y + z & = 3 \\ x + 2y + z & = 3 \end{cases}$

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Trouver les valeurs propres de A.

Exercice 10. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Trouver les valeurs propres de B.

b) Déterminer les vecteurs propres correspondants.

Révisions et approfondissement

Exercice 11. Parmi les opérations matricielles suivantes, préciser celles qui sont bien définies, le format de la matrice obtenue et faire le calcul le cas échéant : $-2A$, $A+B$, $x+y$, AB, BA, Ax, xA, By, yB, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 12. Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

Exercice 13. a) Calculer

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Est-ce B orthogonale ?

Exercice 14. La matrice hamiltonien de Hükel de butadiène[1] est donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les valeurs propres (en termes de α et β.

(b) Donner les vecteurs propres orthonormales.

Les relations suivantes peuvent vous être utiles : $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2$ (nombre d'or), $\varphi^2 = (\sqrt{5}+3)/2$, $\varphi - 1 = (\sqrt{5}-1)/2 = 1/\varphi$, $\varphi^2 - 1 = \varphi$ *et* $\varphi^2 - \varphi = 1$.

1. Hydrocarbure éthylénique employé dans la fabrication du caoutchouc synthétique