

Nombres complexes

Ce notebook est relatif au premier chapitre de cours de Prolégomènes de Mathématiques du [Master Sciences et Numérique pour la Santé](https://sns.edu.umontpellier.fr) (<https://sns.edu.umontpellier.fr>).

⚠ Rappel ⚠ : Ce chapitre a pour objectif de synthétiser les notions et formules essentielles à l'utilisation des nombres complexes. Dans le cadre du Master, elles trouvent leurs applications dans les modules suivants : HAH807E - Chaîne d'Acquisition / Traitement du Signal, HAH710E - Ingénierie : Électronique, HAH802E - Capteurs et Traitement d'Images, HAH808E - Capteurs US pour le Biomédical, HAH805E - Robotique médicale, HAH806E - Neuroprothèse, HAH906E - Acquisition de données et traitement du signal pour le biomédical, HAH908E - Thermographie IR, détecteurs optiques et US, HAH909E - Robotique médicale 2, HAH910E - Neuroprothèse 2.

Notebook réalisé par E. Le Clézio, le 21 août 2023.

[Master Sciences et Numérique pour la Santé](https://sns.edu.umontpellier.fr) (<https://sns.edu.umontpellier.fr>)
[Université de Montpellier](https://www.umontpellier.fr) (<https://www.umontpellier.fr>)

Import des bibliothèques nécessaires au fonctionnement du Notebook

Entrée [1]:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 :

Soient les nombres complexes $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

1. Quelles sont les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 ?
2. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 * z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Entrée [5]:

```
1  z1 = 2-1j
2  z2 = 1+2j
3
4  print('1.')
5  print('La partie réelle de z1 est :', np.real(z1))
6  print('La partie imaginaire de z1 est :', np.imag(z1))
7  print('La partie réelle de z2 est :', np.real(z2))
8  print('La partie imaginaire de z2 est :', np.imag(z2))
9
10 print('2.')
11
12 print('z1+z2 = ', z1+z2)
13 print('z1-z2 = ', z1-z2)
14 print('z1*z2 = ', z1*z2)
15 print('z1/z2 = ', z1/z2)
16
```

1.
La partie réelle de z1 est : 2.0
La partie imaginaire de z1 est : -1.0
La partie réelle de z2 est : 1.0
La partie imaginaire de z2 est : 2.0

2.
z1+z2 = (3+1j)
z1-z2 = (1-3j)
z1*z2 = (4+3j)
z1/z2 = -1j

Exercice 2 :

Soient les nombres complexes $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

1. Quels sont les conjugués $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ de z_1 et z_2 ?
2. Vérifier que les relations ci-dessus sont bien vérifiées.

Entrée [6]:

```
1  print('1.')
2  print('Le conjugué de z1 est :', np.conj(z1))
3  print('Le conjugué de z2 est :', np.conj(z2))
4  print('2.')

```

1.
Le conjugué de z1 est : (2+1j)
Le conjugué de z2 est : (1-2j)

2.

$$\begin{aligned}\overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z'}, \\ \overline{-z} &= -\bar{z}, \\ \overline{zz'} &= \bar{z}\bar{z'}, \\ \overline{z^n} &= \bar{z}^n, \\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} &= \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.\end{aligned}$$

Entrée [7]:

```
1 print(np.conj(z1+z2)-(np.conj(z1)+np.conj(z2)))
2 print(np.conj(-z1)-(-np.conj(z1)))
3 print(np.conj(z1*z2)-(np.conj(z1)*np.conj(z2)))
4 print(np.conj(z1**10)-(np.conj(z1)**10))
5 print(np.conj(z1/z2)-(np.conj(z1)/np.conj(z2)))
```

```
0j
0j
0j
0j
0j
```

Exercice 3 :

Soit le nombre complexe $z = a + ib$. Calculer $z\bar{z}$.

$$\begin{aligned}(a + ib) * (a - ib) &= a^2 - aib + iba - (ib)^2 \\ &= a^2 - iab + iab - i^2b^2 \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Exercice 4 :

La définition précédente aurait-elle pu être prévue par un raisonnement géométrique ?

Il s'agit en fait du théorème de Pythagore.

Exercice 5 :

Soient les nombres complexes $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 + 2i$. Calculer leurs modules et arguments.

Entrée [13]:

```
1 print('Le module au carré de z1 est :', np.abs(z1)**2)
2 print('Le module de z1 est :', np.abs(z1))
3 print("L'argument de z1 est :", np.angle(z1), '[rad], soient ',
4 print('Le module de au carré z2 est :', np.abs(z2)**2)
5 print('Le module de z2 est :', np.abs(z2))
6 print("L'argument de z2 est :", np.angle(z2), '[rad], soient ',
7 print((-np.angle(z1)+np.angle(z2))*2)
```

Le module au carré de z1 est : 5.0000000000000001

Le module de z1 est : 2.23606797749979

L'argument de z1 est : -0.4636476090008061 [rad], soient -26.5650
5117707799 °.

Le module de au carré z2 est : 5.0000000000000001

Le module de z2 est : 2.23606797749979

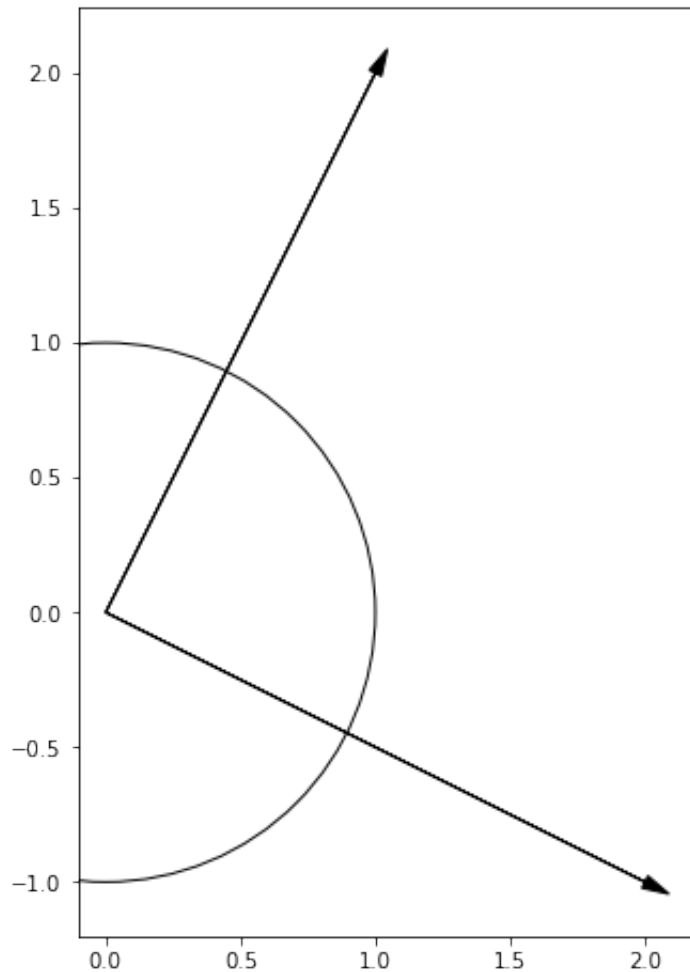
L'argument de z2 est : 1.1071487177940904 [rad], soient 63.434948
82292201 °.

3.141592653589793

Entrée [15]:

```
1 figure, axes = plt.subplots(figsize = (8,8))
2 Drawing_uncolored_circle = plt.Circle( (0, 0), 1, fill = False
3
4 axes.set_aspect( 1 )
5 axes.add_artist( Drawing_uncolored_circle )
6 #plt.plot([2, -1], [1, 2], 'k--')
7 #plt.plot([0, 0], [-5, 5], 'k--')
8
9 plt.arrow(0, 0, 2, -1, head_width=0.05, head_length=0.1, fc='k'
10 plt.arrow(0, 0, 1, 2, head_width=0.05, head_length=0.1, fc='k',
11
```

Out[15]: <matplotlib.patches.FancyArrow at 0x7f8508631160>



Exercice 6 :

Déterminer, dans le plan complexe, les positions des deux racines carrées d'un nombre complexe z . Vous vous aiderez du cercle trigonométrique pour cela.

$$\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\phi+2i\pi} \\
z^{1/2} &= |z|^{1/2}(e^{i\phi+2ik\pi})^{1/2} \\
z^{1/2} &= \sqrt{|z|}(e^{(i\phi+2ik\pi)/2}) \\
z^{1/2} &= \sqrt{|z|}e^{(i\phi/2+ik\pi)} \\
z^{1/2} &= \{ \sqrt{|z|}e^{(i\phi/2+i0\pi)}; \sqrt{|z|}e^{(i\phi/2+i1\pi)} \} \\
z^{1/2} &= \{ \sqrt{|z|}e^{(i\phi/2)}; \sqrt{|z|}e^{(i\phi/2+i\pi)} \} \\
z^{1/2} &= \{ \sqrt{|z|}e^{(i\phi/2)}; -\sqrt{|z|}e^{(i\phi/2)} \}.
\end{aligned}$$

Exercice 7 :

Déterminer, dans le plan complexe, les positions des racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe z . Vous vous aiderez du cercle trigonométrique pour cela.

$$\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\phi+2i\pi} \\
z^{1/n} &= |z|^{1/n}(e^{i\phi+2ik\pi})^{1/n} \\
z^{1/n} &= \sqrt[n]{|z|}(e^{(i\phi+2ik\pi)/n}) \\
z^{1/n} &= \sqrt[n]{|z|}e^{(i\phi/n+i2k/n\pi)} \\
z^{1/n} &= \{ \sqrt[n]{|z|}e^{(i\phi/n+i0\pi)}; \dots; \sqrt[n]{|z|}e^{(i\phi/n+i(n-1)/n\pi)} \} \\
z^{1/n} &= \{ \sqrt[n]{|z|}e^{(i\phi/n)}; \dots; \sqrt[n]{|z|}e^{(i\phi/n+i(n-1)/n\pi)} \}.
\end{aligned}$$

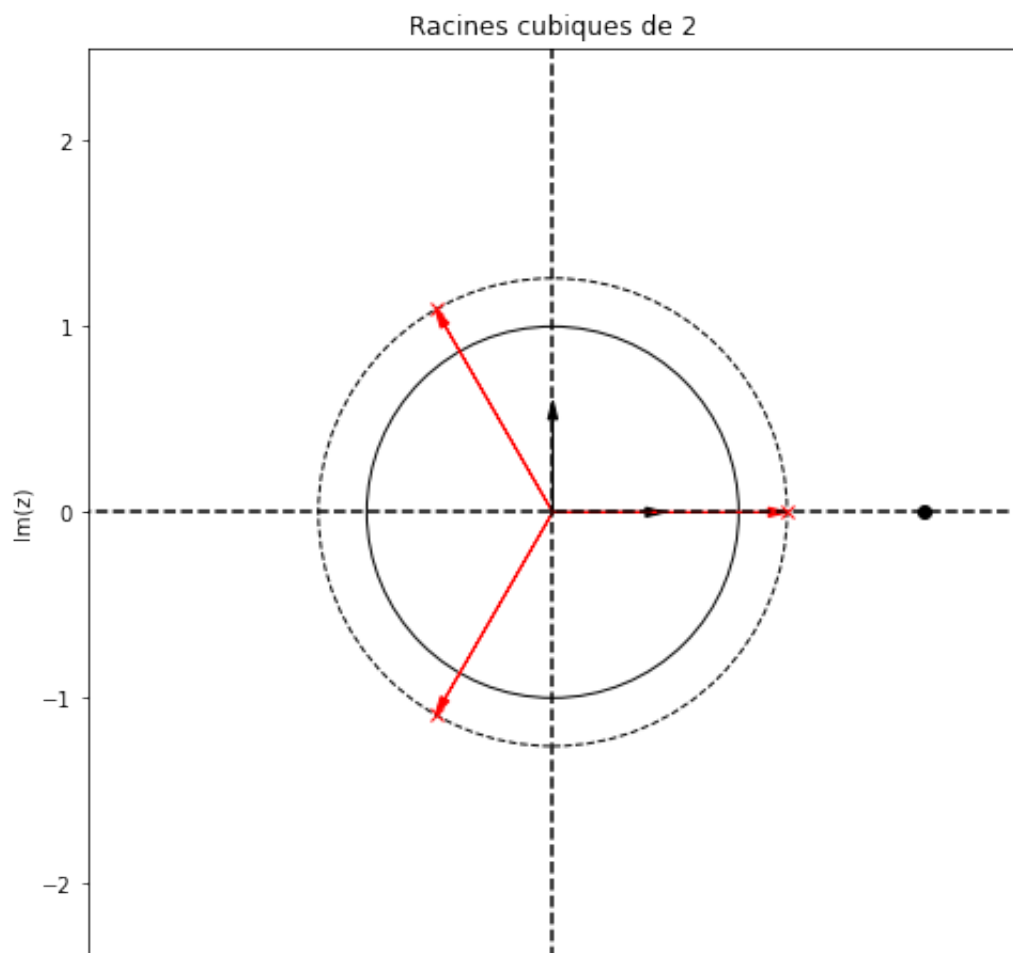
Application : racines cubiques de 2

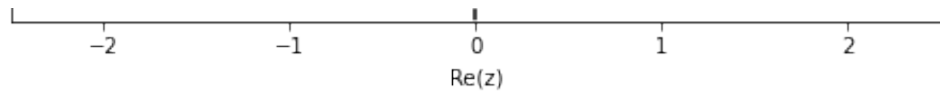
Entrée [16]:

```

1 figure, axes = plt.subplots(figsize = (8,8))
2 Drawing_uncolored_circle = plt.Circle( (0, 0), 1, fill = False
3
4 axes.set_aspect( 1 )
5 axes.add_artist( Drawing_uncolored_circle )
6 plt.plot([-5, 5], [0, 0], 'k--')
7 plt.plot([0, 0], [-5, 5], 'k--')
8
9 plt.arrow(0, 0, 0, 0.5, head_width=0.05, head_length=0.1, fc='k'
10 plt.arrow(0, 0, 0.5, 0, head_width=0.05, head_length=0.1, fc='k'
11
12 plt.plot(2, 0, 'ko')
13 plt.plot(np.power(2, 1/3)*np.cos(0), np.power(2, 1/3)*np.sin(0)
14 plt.plot(np.power(2, 1/3)*np.cos(2*np.pi/3), np.power(2, 1/3)*n
15 plt.plot(np.power(2, 1/3)*np.cos(4*np.pi/3), np.power(2, 1/3)*n
16
17 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/3)-0.1)*np.cos(0), (np.power(2,
18 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/3)-0.1)*np.cos(2*np.pi/3), (np.p
19 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/3)-0.1)*np.cos(4*np.pi/3), (np.p
20
21 Drawing_uncolored_circle = plt.Circle( (0, 0), np.power(2, 1/3)
22 axes.add_artist( Drawing_uncolored_circle )
23
24 plt.xlim([-2.5,2.5])
25 plt.ylim([-2.5,2.5])
26 plt.xlabel('Re(z)')
27 plt.ylabel('Im(z)')
28 plt.title( 'Racines cubiques de 2' )
29 plt.show()

```





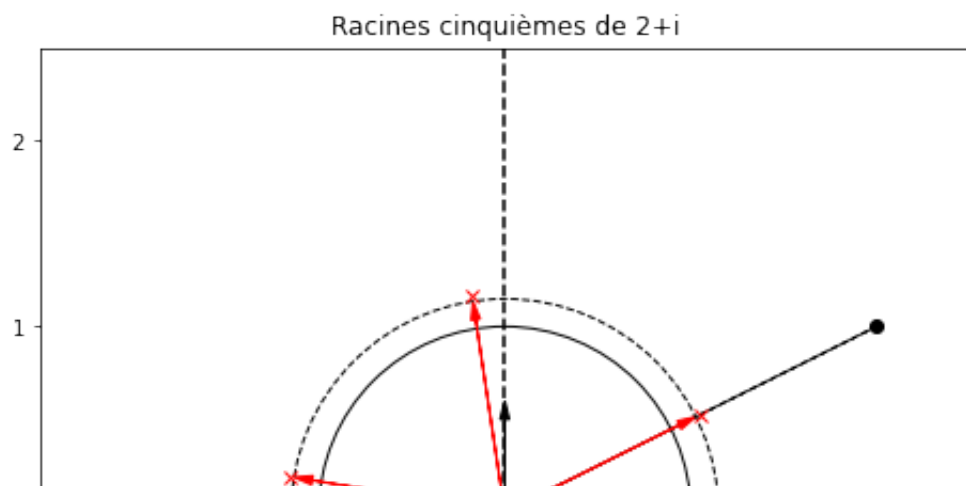
Application : racines cinquième de $2 + i$

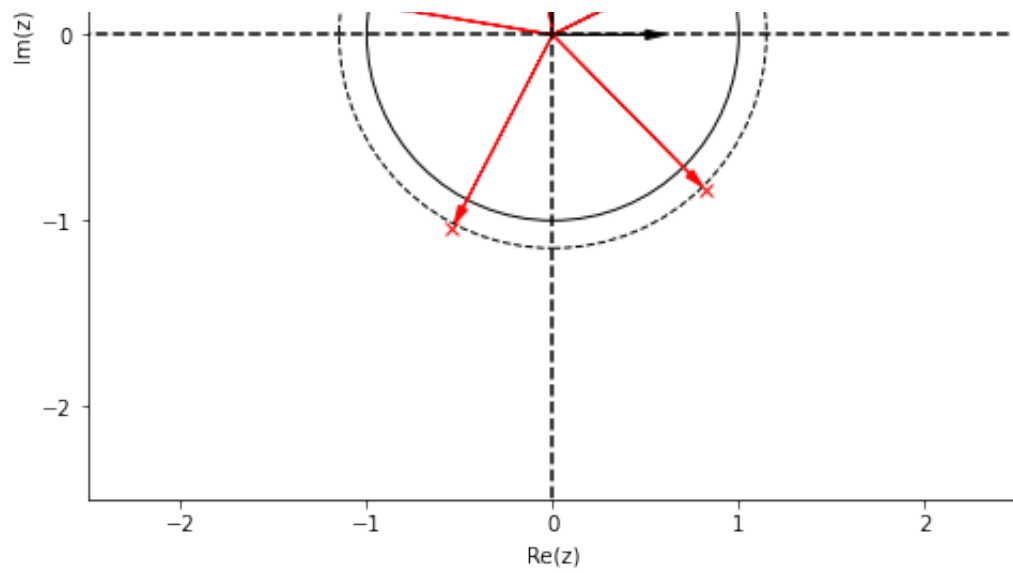
Entrée [86]:

```

1 figure, axes = plt.subplots(figsize = (8,8))
2 Drawing_uncolored_circle = plt.Circle( (0, 0), 1, fill = False
3
4 axes.set_aspect( 1 )
5 axes.add_artist( Drawing_uncolored_circle )
6 plt.plot([-5, 5], [0, 0], 'k--')
7 plt.plot([0, 0], [-5, 5], 'k--')
8
9 plt.arrow(0, 0, 0, 0.5, head_width=0.05, head_length=0.1, fc='k'
10 plt.arrow(0, 0, 0.5, 0, head_width=0.05, head_length=0.1, fc='k'
11
12 plt.plot(2, 1, 'ko')
13 plt.arrow(0, 0, 2, 1, head_width=0, head_length=0, fc='k', ec='
14
15 plt.plot(np.power(np.abs(2+1j), 1/5)*np.real(np.exp(1j*np.angle
16 plt.plot(np.power(np.abs(2+1j), 1/5)*np.real(np.exp(1j*(np.angle
17 plt.plot(np.power(np.abs(2+1j), 1/5)*np.real(np.exp(1j*(np.angle
18 plt.plot(np.power(np.abs(2+1j), 1/5)*np.real(np.exp(1j*(np.angle
19 plt.plot(np.power(np.abs(2+1j), 1/5)*np.real(np.exp(1j*(np.angle
20
21 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/5)-0.1)*np.cos(np.angle(2+1j))+0)
22 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/5)-0.1)*np.cos(np.angle(2+1j))+2*
23 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/5)-0.1)*np.cos(np.angle(2+1j))+4*
24 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/5)-0.1)*np.cos(np.angle(2+1j))+6*
25 plt.arrow(0, 0, (np.power(2, 1/5)-0.1)*np.cos(np.angle(2+1j))+8*
26
27 Drawing_uncolored_circle = plt.Circle( (0, 0), np.power(2, 1/5)
28 axes.add_artist( Drawing_uncolored_circle )
29
30 plt.xlim([-2.5,2.5])
31 plt.ylim([-2.5,2.5])
32 plt.xlabel('Re(z)')
33 plt.ylabel('Im(z)')
34 plt.title( 'Racines cinquièmes de 2+i' )
35 plt.show()

```





Exercice 8 :

Rappeler l'expression de $\sin(z)$ en fonction de e^{iz} et e^{-iz} .

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$