Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Licence 2 - HAC310X Mathématiques pour la Chimie

EXAMEN FINAL-Session 2

(10/06/2024)

Durée : 2 h 00

Calculatrices, documents et portables interdits

(Justifier toutes les réponses)

Problème 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ avec a et b de nombres réels.

(a) Donner une condition suffisante et nécessaire pour a et b pour que la matrice A soit inversible. On suppose que cette condition est satisfaite. Calculer l'inverse de A.

(b) Donner une condition suffisante et nécessaire pour a et b pour que la matrice A soit orthogonale.

(c) Donner une condition suffisante et nécessaire pour a et b pour que la matrice A admette deux valeurs propres <u>distinctes</u> (éventuellement complexes).

On suppose que la condition trouvée au 1 (c) est satisfaite et on note α et β les valeurs propres.

(d) Vérifier que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés à α et β respectivement pour la matrice A.

Problème 2.

(a) Calculer $\frac{3+6i}{3-4i}$ et $(5+5i)^2$.

(b) Trouver les racines carrés de $8-6i$ dans $\mathbb{C}$.

(c) Résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{8}z + \frac{3}{2}i = 0$.

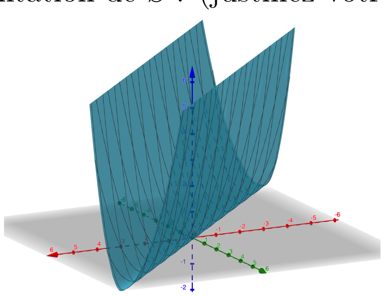
Problème 3. Soit $f(x,y) = x^2 + 4x + 4 + y^2$.

(a) Déterminer les extrema locaux de f et leur nature.

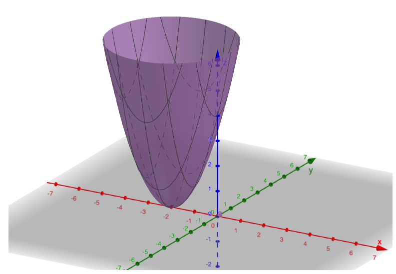
(b) La surface-graphe S_f contient-elle l'origine ?

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et C_λ la courbe de niveau λ de $f(x,y)$. Donner l'équation de C_λ et tracer C_λ pour $\lambda = 1, 2, 3$.

(d) S_f correspond-t-elle à l'une des deux représentions ci-dessous ? Si ce n'est pas le cas, donner une représentation de S ? (justifiez votre réponse).



(a)



(b)

Tournez S.V.P.

Problème 4. On considère la forme différentielle

$$w = y^2 dx + x^2 dy$$

(a) Dans quel domaine w est-elle définie ? Ce domaine est-il étoilé ?

(b) La forme w est-elle exacte ? Si c'est le cas chercher f tel que $df = w$.

Soit C l'arc de la parabole $2y^2 = x + 1$ qui joint $A[1;1]$ à $B[-1,0]$.

(c) Dessiner C.

(d) Paramétrer l'ensemble C.

(e) Calculer $\int_C w$.

Problème 5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$.
(a) Dessiner la région D.
(b) Calculer $\int\int_D (x + y)e^{-y}\ dy\ dx$.

Problème 6. On souhaite résoudre le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Trouver les solutions de l'équation homogène associée.
(b) Trouver une solution de l'équation complète.
(c) En déduire la solution de l'équation complète satisfaisant la condition initiale.